

Math. P.⁴⁶
147 n

Math. P. 4^o

Hansen

147 n

*Dr. Böttg. Alexander d. Math. Professor
zu Münster*

*Konst.
Hof.*

P. A. HANSEN,

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN,

ENTWICKELUNG DES PRODUCTS

EINER

POTENZ DES RADIUS VECTORS

MIT DEM

**SINUS ODER COSINUS EINES VIELFACHEN DER WAHREN
ANOMALIE IN REIHEN,**

DIE

NACH DEN SINUSSEN ODER COSINUSSEN DER VIELFACHEN DER WAHREN, EXCENTRISCHEN
ODER MITTLEREN ANOMALIE FORTSCHREITEN.

Aus den Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königlich Sächsischen
Gesellschaft der Wissenschaften.

LEIPZIG,

BEI S. HIRZEL.

1853.

INHALT DER BERICHTE
über die Verhandlungen
der
MATHEMATISCH-PHYSISCHEN CLASSE
der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften
zu Leipzig.

Aus den Jahren 1846 und 1847. 12 Hefte die Verhandlungen beider Classen enthaltend. gr. 8. broch. Jedes Heft 10 Ngr.

- MÖBIUS, über die phoronomische Deutung des Taylorschen Theorems.
ERDMANN, über Samenaschen und deren Analyse.
E. H. WEBER, Untersuchung der Wirkungen, welche die magneto-electrische Reizung der Blutgefässe bei lebenden Thieren hervorbringt.
LEHMANN, über den Gehalt des Blutes an kohlensaurem Alkali.
LEHMANN, über die saure Reaction des Magensaftes.
SEEBECK, über die Schwingungen gespannter und nichtgespannter Stäbe.
NAUMANN, über die cyclocentrische Conchospirale und über das Windungsgesetz von Platanorbis Corneus.
MÖBIUS, Verallgemeinerung des Pascalschen Theorems, das in einen Kegelschnitt beschriebene Sechseck betreffend.
E. H. WEBER, über den Einfluss der Erwärmung und Erkältung der Nerven auf ihr Leitungsvermögen.
E. H. WEBER, über den Mechanismus der Einsaugung des Speisesaftes bei dem Menschen und bei einigen Thieren.
E. H. WEBER, über den Descensus testiculorum bei dem Menschen und bei einigen Säugethieren.
REICH, über die abstossende Wirkung eines Magnetpoles auf unmagnetische Körper.
HANSEN, über eine allgem. Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen.
HANSEN, über die Entwicklung der Grösse $(1 - 2\alpha H + \alpha^2) - \frac{1}{2}$ nach den Potenzen von α .
HANSEN, über die Knotenbewegung des Mondes.
W. WEBER, über die Erregung und Wirkung des Diamagnetismus nach den Gesetzen inducirter Ströme.
E. H. WEBER, über die Tastorgane als die allein fähigen uns die Empfindungen von Wärme, Kälte und Druck zu verschaffen.
SEEBECK, über die Töne steifer Saiten.
NAUMANN, über die Felsenschliffe der Hohburger Porphyrberge unweit Wurzen.

Aus dem Jahr 1848. 6 Hefte die Verhandlungen beider Classen enthaltend. 8. broch. Jedes Heft 10 Ngr.

- MÖBIUS, über die Grundformen der Linien der dritten Ordnung.
ERDMANN, über die Mellithsäure.
NAUMANN, über die logarithmische Spirale von Nautilus Pompilius und Ammonites galeatus.
NAUMANN, über die im Königreiche Sachsen möglicherweise noch aufzufindenden Steinkohlen.
MÖBIUS, über den von Graham entdeckten Planeten.
CARUS, über eine krankhafte Verbildung mehrerer Suturen des Schädels.
DROBISCH, über die geometrische Construction der imaginären Grössen.
MÖBIUS, über die Gestalt sphärischer Curven, welche keine merkwürdigen Punkte haben.
SEEBECK, über Interferenz der Wärmestrahlen.
E. H. WEBER, Beiträge zur Anatomie und Physiologie des Bibers, castor fiber.
LEHMANN, über das chemische Verhalten des russischen und canadischen Castoreum und des Smegma praeputii des Pferdes.
E. H. WEBER, über die Umstände durch welche man geleitet wird Empfindungen auf äussere Objecte zu beziehen.
REICH, über die magnetische Polarität des Pöhlbergs bei Annaberg.

Aus dem Jahr 1849. 3 Hefte die Verhandlungen der mathematisch-physischen Classe enthaltend. 8. broch. Jedes Heft 10 Ngr.

- W. WEBER, Bemerkung zu Neumanns Theorie inducirter Ströme.
LEHMANN, über einige quantitative Verhältnisse die den Verdauungsprocess betreffen.
FECHNER, über die mathematische Behandlung organischer Gestalten und Processe.
A. F. MÖBIUS, über das Gesetz der Symmetrie der Krystalle.

ENTWICKELUNG DES PRODUCTS

EINER

POTENZ DES RADIUS VECTORS

MIT DEM

SINUS ODER COSINUS EINES VIELFACHEN DER WAHREN
ANOMALIE IN REIHEN,

DIE

NACH DEN SINUSSEN ODER COSINUSSEN DER VIELFACHEN DER WAHREN,
EXCENTRISCHEN ODER MITTLEREN ANOMALIE FORTSCHREITEN.

VON

P. A. HANSEN.



Es zerfällt diese Abhandlung in mehrere Theile, die mit einander in Verbindung stehen. Bezeichnet man den Radius Vector der Ellipse mit r , die wahre, excentrische und mittlere Anomalie bez. mit f , ϵ und g , so werden im § I die Producte $r^n \cos mf$ und $r^n \sin mf$ in Reihen entwickelt, die nach $\cos if$ und bez. $\sin if$ fortschreiten. Im § II wird die Entwicklung von $\cos \mu f$ und $\sin \mu f$ nach $\cos i\epsilon$ und $\sin i\epsilon$, so wie die entgegengesetzte Entwicklung ausgeführt. Im § III die Entwicklung von $r^n \cos mf$ und $r^n \sin mf$ nach $\cos i\epsilon$ und $\sin i\epsilon$, die sowohl durch die Verbindung des Inhalts der beiden vor. §§, wie direct erhalten wird. Der § IV giebt die Entwicklung von $\cos i\epsilon$ und $\sin i\epsilon$ nach $\cos hg$ und $\sin hg$, so wie die entgegengesetzte Entwicklung. Der § V enthält die Entwicklung von $\cos \mu f$ und $\sin \mu f$ nach $\cos ig$ und $\sin ig$, so wie die entgegengesetzte Entwicklung, und zwar werden diese einestheils durch den Inhalt der vor. §§, und anderntheils unmittelbar erhalten. Im § VI endlich entwickle ich $r^n \cos mf$ und $r^n \sin mf$ nach $\cos ig$ und $\sin ig$, und zwar auch einestheils aus dem Inhalt der vor. §§, und anderntheils unmittelbar.

Bei diesen Entwicklungen bediene ich mich stets der zu den Anomalien gehörigen imaginären Exponentialfunctionen, wodurch an Einfachheit viel gewonnen wird, und neue Formen aufgefunden werden, die ohne dieses Hülfsmittel schwer zu finden sein würden. Da ich in dem Bericht, welcher diese Abhandlung begleitet, den Inhalt derselben ausführlicher aus einander gesetzt habe, so erlaube ich mir, in dieser Einleitung darauf hinzuweisen.

§ I.

Entwicklung der Functionen $r^n \cos mf$ und $r^n \sin mf$ in Reihen, die nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen von f fortschreiten.

1.

Die zur wahren Anomalie f gehörige imaginäre Exponentialfunction nenne ich x , so dass also

$$x = e^{f\sqrt{-1}}$$

ist, wenn e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bedeutet. Nennt man ausserdem e die Excentricität und ϱ das Verhältniss des Radius Vectors zur grossen Halbachse, und setzt

$$e = \sin \varphi, \quad \beta = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi$$

so geht die Gleichung

$$\varrho^n = \left(\frac{1 - e^2}{1 + e \cos f} \right)^n$$

in folgende über

$$(1) \quad \varrho^n = (1 - \beta^2)^n \cos^n \varphi (1 + \beta x)^{-n} \left(1 + \frac{\beta}{x}\right)^{-n}$$

wo der Exponent n jeden beliebigen Werth haben kann. Dieser Ausdruck zeigt, dass man ϱ^n in eine convergirende, nach den ganzen, positiven und negativen, Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln kann. Wir dürfen also setzen

$$(2) \quad \varrho^n = \sum_{-\infty}^{+\infty} V_i^{(n)} x^i$$

wo i stets eine ganze Zahl ist, und nothwendig

$$V_{-i}^{(n)} = V_i^{(n)}$$

sein muss, weil ϱ^n eine reelle Grösse ist.*)

2.

Wenn die Werthe der mit $V_i^{(n)}$ bezeichneten Coefficienten ermittelt sind, so ist es leicht die in der Ueberschrift angegebenen Entwicklungen herzustellen. Aus der Gleichung (2) folgt nemlich sofort

$$\varrho^n x^m = \sum_{-\infty}^{+\infty} V_i^{(n)} x^{i+m}$$

$$\varrho^n x^{-m} = \sum_{-\infty}^{+\infty} V_i^{(n)} x^{i-m}$$

Da nun für jeden Werth von p

$$x^p = \cos pf + \sqrt{-1} \cdot \sin pf,$$

und wenn man mit a die grosse Halbachse, und mit r den Radius Vector bezeichnet, $r = a\varrho$ ist, so folgt hieraus leicht, dass

*) Imaginäre Exponenten schliesse ich nemlich durchgehends aus.

$$r^n \cos mf = a^n V_m^{(n)} + a^n \sum_1^\infty \{ V_{i-m}^{(n)} + V_{i+m}^{(n)} \} \cos if$$

$$r^n \sin mf = a^n \sum_1^\infty \{ V_{i-m}^{(n)} - V_{i+m}^{(n)} \} \sin if$$

3.

Durch den binomischen Satz ergibt sich

$$(1 + \beta x)^{-n} = 1 - \frac{n}{1} \beta x + \frac{n \cdot n+1}{1 \cdot 2} \beta^2 x^2 - \frac{n \cdot n+1 \cdot n+2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \beta^3 x^3 \pm \text{etc.}$$

$$\left(1 + \frac{\beta}{x}\right)^{-n} = 1 - \frac{n}{1} \frac{\beta}{x} + \frac{n \cdot n+1}{1 \cdot 2} \frac{\beta^2}{x^2} - \frac{n \cdot n+1 \cdot n+2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{\beta^3}{x^3} \pm \text{etc.}$$

und hieraus wegen der Gleichungen (1) und (2)

$$V_0^{(n)} = \cos^n \varphi (1 - \beta^2)^n \left\{ 1 + \frac{n^2}{1^2} \beta^2 + \frac{n^2 (n+1)^2}{1^2 \cdot 2^2} \beta^4 + \frac{n^2 (n+1)^2 (n+2)^2}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} \beta^6 + \text{etc.} \right\}$$

$$V_{\pm 1}^{(n)} = - \cos^n \varphi (1 - \beta^2)^n \left\{ \frac{n}{1} \beta + \frac{n^2 \cdot n+1}{1^2 \cdot 2} \beta^3 + \frac{n^2 (n+1)^2 \cdot n+2}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3} \beta^5 + \text{etc.} \right\}$$

$$V_{\pm 2}^{(n)} = \cos^n \varphi (1 - \beta^2)^n \left\{ \frac{n \cdot n+1}{1 \cdot 2} \beta^2 + \frac{n^2 \cdot n+1 \cdot n+2}{1^2 \cdot 2 \cdot 3} \beta^4 + \frac{n^2 (n+1)^2 \cdot n+2 \cdot n+3}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 4} \beta^6 + \text{etc.} \right\}$$

etc. etc.

welche Reihen für jeden Werth von $\beta < 1$ convergiren. Für $n = 1$ folgen hieraus sofort die einfachen Ausdrücke

$$V_0^{(1)} = \cos \varphi; \quad V_{\pm 1}^{(1)} = - \beta \cos \varphi; \quad V_{\pm 2}^{(1)} = \beta^2 \cos \varphi, \quad \text{etc.} \quad (3)$$

4.

Der obige Ausdruck (1) für ϱ^n giebt leicht eine linearische Gleichung zwischen vier V Coefficienten. Es folgt nemlich daraus, und weil

$$\cos \varphi = \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2}$$

ist

$$\varrho^{n-1} = \frac{\varrho^n}{\cos^2 \varphi} + \frac{\beta}{(1 - \beta^2) \cos \varphi} \varrho^n x + \frac{\beta}{(1 - \beta^2) \cos \varphi} \varrho^n \frac{1}{x}$$

Substituirt man hierin für ϱ^n und ϱ^{n-1} die Ausdrücke

$$\varrho^n = \sum V_i^{(n)} x^i, \quad \varrho^{n-1} = \sum V_i^{(n-1)} x^i$$

und vergleicht die mit derselben Potenz von x multiplicirten Glieder, so ergibt sich sogleich

$$V_i^{(n-1)} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} V_i^{(n)} + \frac{\beta}{(1 - \beta^2) \cos \varphi} \{ V_{i-1}^{(n)} + V_{i+1}^{(n)} \} \quad (4)$$

vermittelst welcher man alle zur Potenz $n-1$ gehörigen V Coefficienten bekommen kann, wenn die zur Potenz n gehörigen berechnet worden sind. Man kann aber durch Zuziehung des Differentials von ϱ eine Gleichung zwischen drei V Coefficienten finden, welche bessere Dienste leistet. Das Differential lässt sich leicht wie folgt stellen,

$$x \frac{d \cdot \varrho^n}{dx} = n \frac{\beta(1+\beta^2)}{(1-\beta^2)^2} \left(\frac{1}{x} - x \right) \varrho^{n+1}$$

und ausserdem giebt die Gleichung (4) die folgende

$$n\varrho^n = n \left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \right)^2 \varrho^{n+1} + n \frac{\beta(1+\beta^2)}{(1-\beta^2)^2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \varrho^{n+1}$$

addirt und subtrahirt man diese, so erhält man

$$n\varrho^n + x \frac{d \cdot \varrho^n}{dx} = n \left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \right)^2 \varrho^{n+1} + 2n \frac{\beta}{1-\beta^2} \left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \right) \frac{1}{x} \varrho^{n+1}$$

$$n\varrho^n - x \frac{d \cdot \varrho^n}{dx} = n \left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \right)^2 \varrho^{n+1} + 2n \frac{\beta}{1-\beta^2} \left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \right) x \varrho^{n+1}$$

Die Substitution der Werthe

$$\varrho^n = \sum V_i^{(n)} x^i, \quad x \frac{d \cdot \varrho^n}{dx} = \sum i V_i^{(n)} x^i$$

giebt hiemit

$$(5) \quad (n+i) V_i^{(n)} = n \left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \right)^2 V_i^{(n+1)} + 2n \frac{\beta}{1-\beta^2} \left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \right) V_{i+1}^{(n+1)}$$

$$(6) \quad (n-i) V_i^{(n)} = n \left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \right)^2 V_i^{(n+1)} + 2n \frac{\beta}{1-\beta^2} \left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \right) V_{i-1}^{(n+1)}$$

deren eine auch aus der andern folgt, wenn man $-i$ statt i schreibt, und auf die Gleichung

$$V_i^{(n)} = V_{-i}^{(n)}$$

Rücksicht nimmt.

Die Gleichung (5) giebt

$$(7) \quad V_i^{(n)} = \frac{n}{n+i} \left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \right)^2 V_i^{(n+1)} + \frac{2n}{n+i} \frac{\beta}{1-\beta^2} \left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \right) V_{i+1}^{(n+1)}$$

die wenn n positiv ist auf sichere Art alle $V_i^{(n)}$ durch die $V_i^{(n+1)}$ giebt, welches bei der Gleichung (4) nicht immer der Fall ist. Denn die beiden Glieder rechter Hand haben entgegengesetzte Zeichen und $V_i^{(n)}$ ist von der Ordnung β^i , wenn also β klein ist, so sind in (4) die beiden bez. mit $V_i^{(n)}$ und $V_{i-1}^{(n)}$ multiplicirten Glieder Grössen einer und derselben Ordnung, die von einander subtrahirt werden müssen. Dieser Uebelstand findet in (7) nicht statt. Wenn man daher für eine Reihe ganzer und positiver Werthe von n die VCoefficienten zu berechnen hat, und auf irgend eine andere Art dieselben für den grössten Werth von n , dessen man bedarf, berechnet hat, so erhält man durch die Gleichung (7) diese Coefficienten für alle übrigen Werthe von n auf sichere Art.

Eine andere Art die VCoefficienten für eine Reihe ganzer und positiver Werthe von n sicher zu berechnen, lässt sich aus der Gleichung (6) ableiten. Setzt man in diese $i+1$ statt i , so lässt sie sich in folgende verwandeln

$$V_{i+1}^{(n+1)} = \left(\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2} \right)^2 \frac{n-i-1}{n} V_{i+1}^{(n)} - \frac{2\beta}{1+\beta^2} V_i^{(n+1)} \quad (8)$$

Rechnet man die $V_i^{(1)}$ durch die Gleichungen (3) und ausserdem für jeden ganzen und positiven Werth von n die $V_0^{(n)}$ auf irgend eine andere Art, so kann man durch (8) alle übrigen VCoefficienten sicher berechnen.

Aus (6) folgt ausserdem

$$V_i^{(n)} = \frac{n}{n-i} \left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \right)^2 V_i^{(n+1)} + \frac{2n}{n-i} \frac{\beta}{1-\beta^2} \left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \right) V_{i-1}^{(n+1)} \quad (9)$$

und aus (1) folgt sogleich

$$V_0^{(-1)} = \frac{1}{\cos^2 \varphi}; \quad V_i^{(-1)} = \frac{\beta}{\cos \varphi (1-\beta^2)}; \quad V_2^{(-1)} = 0; \text{ etc.}$$

Diese geben in Verbindung mit (9) alle VCoefficienten für eine Reihe negativer und ganzer Werthe von n mit Sicherheit.

5.

Wenn e und n beide klein sind, so kann man die VCoefficienten leicht durch die unendlichen Reihen des Art. 3 berechnen, aber wenn diese Bedingungen, oder nur eine derselben, nicht erfüllt sind, so wird diese Art der Berechnung beschwerlich, weil man viele Glieder der Reihen berechnen muss. Ich werde daher jetzt zeigen, wie man für einen gegebenen Werth von n alle diese Coefficienten durch Kettenbrüche berechnen kann, wenn $V_0^{(n)}$ anderweitig berechnet worden ist.

Eliminirt man $V_i^{(n)}$ zwischen den Gleichungen (5) und (6), und schreibt darauf n statt $n+1$, so bekommt man

$$(n+i-1)\beta V_{i-1}^{(n)} + i(1+\beta^2) V_i^{(n)} - (n-i-1)\beta V_{i+1}^{(n)} = 0 \quad (10)$$

welches eine Relation zwischen je drei auf einander folgenden, einem und demselben Werthe des Exponenten n zugehörigen, VCoefficienten ist. Aus dieser Gleichung liessen sich zwar, wenn $V_0^{(n)}$ und $V_1^{(n)}$ anderweitig berechnet worden sind, alle andern, demselben Werthe von n zugehörigen VCoefficienten berechnen, allein diese Berechnung führt auf kleine Differenzen grosser Zahlen, und ist daher unsicher. Die Berechnung durch Kettenbrüche, die ich jetzt auseinander setzen werde, ist von diesem Uebelstande frei, ja sie besitzt im Gegentheil die Eigenschaft, dass ein Fehler in dem zuerst anzuwendenden Verhältniss von zwei auf einander folgenden VCoefficienten in die übrigen mehr und mehr verkleinert übergeht und zuletzt unmerklich wird.

Sei nun, von $i=1$ angefangen, für alle positiven und ganzen Werthe von i

$$\frac{V_i^{(n)}}{V_{i-1}^{(n)}} = p_i$$

so geht die Gleichung (10) über in

$$0 = (n+i-1)\beta + i(1+\beta^2)p_i - (n-i-1)\beta p_i p_{i+1}$$

und setzt man ferner

$$(11) \quad p_i = -F_i \gamma_i$$

$$F_i = \frac{n+i-1}{i} \cdot \frac{\beta}{1+\beta^2} = \frac{i+n-1}{2i} \sin \varphi$$

$$\lambda_i = \frac{(n-i)(n+i-1)}{i(i-1)} \cdot \frac{\beta^2}{(1+\beta^2)^2} = F_i \frac{n-i}{i-1} \cdot \frac{\sin \varphi}{2}$$

so verwandelt sie sich in

$$(12) \quad 0 = 1 - \gamma_i - \gamma_i \gamma_{i+1} \lambda_{i+1}$$

woraus

$$\gamma_i = \frac{1}{1 + \lambda_{i+1} \gamma_{i+1}}$$

und durch fortgesetzte Substitution die Kettenbrüche

$$\gamma_{i-1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \lambda_{i+1}}}}} \quad \gamma_{i-2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \lambda_{i+1}}}}} \quad \text{etc.}$$

entstehen. Man bekommt also, wie man sieht, alle γ_i aus einem und demselben Kettenbruche durch bloße Fortsetzung der Glieder desselben bis zu dem, welches von λ_2 abhängt. Sind hieraus die γ_i berechnet, und darauf die p_i durch (11), so wird

$$V_i^{(n)} = V_0^{(n)} p_1 p_2 p_3 \dots p_i$$

und da

$$V_{-i}^{(n)} = V_i^{(n)}$$

so hat man alle, einem und demselben Werthe des Exponenten n zukommenden V Coefficienten, wenn auf irgend eine andere Art $V_0^{(n)}$ berechnet worden ist.

Der obige Ausdruck für λ_i giebt zu erkennen, dass wenn n eine ganze und positive Zahl ist,

$$\lambda_n = 0$$

wird, es ist daher in diesem Falle

$$\gamma_{n-1} = 1$$

für $i < n-1$ besteht also der Kettenbruch aus einer endlichen Zahl von Gliedern, und zwar hat man, um die γ_i von γ_1 bis γ_{n-1} zu bekommen, überhaupt nur $n-2$ Glieder zu berechnen. Z. B. für $n=6$ wird

$$\gamma_5 = 1, \quad \gamma_4 = \frac{1}{1 + \lambda_5}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{1 + \lambda_4 \gamma_4}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{1 + \lambda_3 \gamma_3}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{1 + \lambda_2 \gamma_2}$$

Derselbe Ausdruck für λ_i zeigt ferner, dass wenn n eine ganze und negative Zahl ist,

$$\lambda_{n+1} = 0$$

wenn man, wie erlaubt ist, auch in diesem Falle i stets positiv annimmt. Es wird daher nun

$$\gamma_n = 1$$

und für $i < (-n)$ besteht der Kettenbruch aus einer endlichen Anzahl von Gliedern, deren Berechnung sich eben so gestaltet, wie die der eben angeführten, und ohne Weiteres sicher ausgeführt werden kann. Für grössere Werthe von i ist die Sache anders, jenachdem die ganze Zahl n positiv oder negativ ist. Wenn sie negativ ist, wird

$$F_{(-n)+1} = 0$$

und deshalb brechen in diesem Falle die VCoefficienten bei $V_{\pm n}^{(n)}$ ab. Ist hingegen n ganz und positiv, so kann F_i nie Null werden, und die VCoefficienten gehen ins Unendliche fort; wenn nun zugleich

$$i > n - 1$$

ist, so geht auch der Kettenbruch ins Unendliche fort und die Anzahl der Glieder desselben, die überhaupt berechnet werden müssen, um eine gewünschte Genauigkeit zu erhalten, hängt von der Beschaffenheit der Grenze ab, nach welcher die γ_i für ein stets wachsendes i hinstreben.

Macht man $i = \infty$ in dem Ausdruck für λ_i , so wird

$$\lambda_\infty = -\frac{1}{4} \sin^2 \varphi$$

und die Gleichung (12) geht über in

$$0 = 4 - 4\gamma_\infty + \sin^2 \varphi \gamma_\infty^2$$

woraus

$$\gamma_\infty = \sec^2 \frac{1}{2} \varphi = 1 + \beta^2$$

folgt. Die Glieder des Kettenbruches convergiren also nicht gegen die Null, sondern gegen die endliche Grösse $-\sin^2 \frac{1}{2} \varphi$. Wenn φ klein ist, so erwächst hieraus kein sonderlicher Uebelstand; wenn dieses aber nicht der Fall ist, so muss man um für den grössten Werth von i , dessen man bedarf, γ_i hinreichend sicher zu erhalten, eine grosse Anzahl der Glieder des Kettenbruches berechnen, in deren letztem man den genäherten Werth $\sec^2 \frac{1}{2} \varphi$ für das betreffende γ_i substituiren muss.

Man kann diesen Uebelstand vermeiden, indem sich für γ_i ein anderer Kettenbruch entwickeln lässt, dessen Glieder, wenn sie nicht etwa abbrechen, stets zur Null hin convergiren. Um diesen aus dem Vorher-

gehenden abzuleiten, werde ich die folgenden allgemeinen Betrachtungen voransenden.

6.

Es sei die folgende allgemeine Gleichung zwischen q_i und q_{i+1} gegeben,

$$(A) \quad q_i (1 + a_i - b_i q_{i+1}) = 1$$

die man in einen Kettenbruch verwandeln soll. Man setze

$$\alpha_i - b_i q_{i+1} = -\alpha_i r_{i+1}$$

wo α_i einstweilen unbestimmt ist. Hiemit geht (A) über in

$$q_i = \frac{1}{1 - \alpha_i r_{i+1}}$$

woraus durch Verschiebung der Indices

$$q_{i+1} = \frac{1}{1 - \alpha_{i+1} r_{i+2}}$$

u. s. w. entsteht. Eliminirt man hiemit q_i und q_{i+1} aus (A), und setzt zugleich

$$\alpha_i = b_i - a_i$$

so ergiebt sich

$$(B) \quad 1 + a_i \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} r_{i+2} = (1 - \alpha_{i+1} r_{i+2}) r_{i+1}$$

Setzt man ferner

$$r_{i+1} = \frac{1}{1 - \beta_i s_{i+2}}; \quad r_{i+2} = \frac{1}{1 - \beta_{i+1} s_{i+3}}; \quad \text{u. s. w.}$$

eliminirt damit r_{i+1} und r_{i+2} aus (B), und bestimmt β_i so, dass

$$\beta_i = \alpha_{i+1} + \alpha_i \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}$$

wird, so erhält man

$$(C) \quad s_{i+2} (1 + c_i - d_i s_{i+3}) = 1$$

wo

$$c_i = a_i \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}; \quad d_i = \beta_{i+1}$$

ist. Die Gleichung (C) ist aber von der nemlichen Form, wie die Gleichung (A), von welcher wir ausgegangen sind, man kann also diese Substitutionen ins Unendliche wiederholen, wodurch der folgende Kettenbruch entsteht,

$$q_i = \frac{1}{1 - \alpha_i \frac{1}{1 - \beta_i \frac{1}{1 - \gamma_i \frac{1}{1 - \delta_i \frac{1}{1 - \text{etc.}}}}}}$$

in welchem

$$\alpha_i = b_i - a_i$$

$$\beta_i = \alpha_{i+1} + a_i \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}$$

$$\gamma_i = d_i - c_i = \beta_{i+1} - a_i \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}$$

$$\delta_i = \gamma_{i+1} + c_i \frac{\gamma_{i+1}}{\gamma_i} = \gamma_{i+1} + a_i \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \cdot \frac{\gamma_{i+1}}{\gamma_i}$$

etc.

7.

Um die Substitutionen des vor. Art. anzuwenden bemerke ich, dass im vorvor. Art. der Grenzwert von γ_i gleich $1 + \beta^2$ gefunden wurde. Man kann also setzen

$$\gamma_i = q_i (1 + \beta^2)$$

wo q_i eine Grösse ist, die für wachsende i die Eins zur Grenze hat. Substituirt man diesen Werth von γ_i , so wie den des vorvor. Art. für λ_i in die Gleichung (12), so kommt

$$q_i \left(1 + \beta^2 + \frac{(n-i-1)(i+n)}{i(i+1)} \beta^2 q_{i+1} \right) = 1$$

vergleicht man diese mit (A), so wird

$$a_i = \beta^2; \quad b_i = - \frac{(n-i-1)(i+n)}{i(i+1)} \beta^2$$

Die Substitution dieser Werthe in die Endformeln des vor. Art. giebt im vorliegenden Falle

$$\alpha_i = \frac{n(1-n)}{i(i+1)} \beta^2; \quad \beta_i = \frac{(i+n)(i+1-n)}{(i+1)(i+2)} \beta^2$$

$$\gamma_i^1 = \frac{(n+1)(2-n)}{(i+2)(i+3)} \beta^2; \quad \delta_i^1 = \frac{(i+1+n)(i+2-n)}{(i+3)(i+4)} \beta^2$$

etc.

etc.

und es wird

$$\gamma_i = \frac{\sec^2 \frac{1}{2} \varphi}{1 - \alpha_i} \cdot \frac{1 - \beta_i}{1 - \gamma_i^1} \cdot \frac{1}{1 - \text{etc.}}$$

*) Es ist sichtbar, dass wie auch n und β beschaffen sein mögen, die α_i, γ_i , etc. für wachsende i zur Null convergiren, während die β_i, δ_i , etc. zu β^2 convergiren. Je grösser i ist, desto weniger Glieder dieses Ket-

*) Ich bemerke hiez zu, dass dieses derselbe Kettenbruch ist, den man aus [25] in Gauss, *Disquisitiones generales circa seriem infinitam* etc. erhalten haben würde.

tenbruchs brauchen berechnet zu werden, um eine gegebene Genauigkeit zu erhalten. Für $i = \infty$ wird $\alpha_i = 0$, etc. also

$$\gamma_\infty = \sec^2 \frac{1}{2} \varphi$$

wie vorher.

Wenn n eine ganze Zahl ist, bricht der Kettenbruch für jeden Werth von i ab, und besteht also stets aus einer endlichen Anzahl von Gliedern. Es ist aus den obigen Ausdrücken sichtbar, dass wenn n positiv ist, die n^{te} der Grössen α_i , γ_i , etc. Null ist, und dass also, i mag sein wie es will, der Kettenbruch nie aus mehr wie $2(n-1)$ Gliedern besteht. Diese Anzahl ist stets vorhanden wenn $i > n-1$ ist, findet aber diese Ungleichheit nicht statt, so wird auch eine der Grössen β_i , δ_i , etc. gleich Null, und der Kettenbruch bricht früher ab. Ist $i = n-1$, so wird schon $\beta_i = 0$ und der Kettenbruch besteht nur aus Einem Gliede, ist $i = n-2$, so ist $\delta_i = 0$, und er besteht aus drei Gliedern u. s. w. Ueberhaupt besteht er aus höchstens $2n - 3$ Gliedern, wenn $i < n$ ist. Wenn n negativ ist, findet ein ähnliches Verhalten statt.

Es wird sich oft ereignen, dass wegen der Kleinheit von β der Kettenbruch so stark convergirt, dass man um die erforderliche Genauigkeit zu erhalten nur eine kleine Anzahl der vorhandenen Glieder zu berechnen braucht. Da man nun bei Anwendung des obigen Kettenbruchs für jedes i alle merklichen Glieder desselben von neuem berechnen muss, der Kettenbruch des Art. 5 hingegen für jeden hinzukommenden Werth von i nur die Berechnung Eines Gliedes verlangt, so verfährt man am zweckmässigsten, wenn man nur für den grössten Werth von i , welcher erforderlich ist, γ_i aus dem Kettenbruche dieses Artikels rechnet, und sich für die übrigen γ_i des im Art. 5 abgeleiteten bedient.

8.

Um durch die eben entwickelten Methoden die $V_{\pm i}^{(n)}$ selbst zu bekommen bedarf es nur noch der Berechnung von $V_0^{(n)}$, und wenn beides n und β klein ist, so kann diese leicht durch die unendliche Reihe des Art. 3 ausgeführt werden. Wenn β klein ist, so kann man sich dieser Reihe auch für ziemlich grosse Werthe von n bedienen, während sie für sehr grosse Werthe von n beschwerlich wird; ist β nicht klein, so wird ihre Anwendung auch für kleine Werthe von n mühsam.

Die $V_i^{(n)}$ überhaupt sind hypergeometrische Reihen von der Gattung, über welche von *Euler*, *Gauss* und *Kummer* so vollständige und schöne Untersuchungen vorliegen, und man weiss dadurch, dass jede derselben sich auf mannigfaltige Art durch andere derselben Gattung ausdrücken lässt. Da in allen Reihen dieser Gattung, die hier vorkommen werden, das vierte Element ein Quadrat ist, so will ich sie hier allgemein mit $F(\alpha, \beta, \gamma, z^2)$ statt der gewöhnlichen Bezeichnung $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ andeuten. Es ist also

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z^2) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} z^2 + \frac{\alpha \cdot \alpha + 1 \cdot \beta \cdot \beta + 1}{1 \cdot 2 \cdot \gamma \cdot \gamma + 1} z^4 + \text{etc.} \quad (13)$$

Die Summe dieser Reihe, die ich auch der Einfachheit wegen bloß mit F bezeichnen werde, lässt sich bekanntlich auch als particuläres Integral einer linearischen Differentialgleichung zweiter Ordnung ausdrücken; macht man in dieser z zur unabhängigen Veränderlichen, so wird sie

$$z(1-z^2) \frac{d^2 F}{dz^2} + \{2\gamma - 1 - (2\alpha + 2\beta + 1)z^2\} \frac{dF}{dz} - 4\alpha\beta z F = 0 \quad (14)$$

Man kann diese direct aus der vorstehenden Reihe ableiten, und man kann sie auch *a posteriori* dadurch verificiren, dass man die Reihe in sie substituirt, wodurch ihr Genüge geleistet wird. Von den Verwandlungsformeln, die man kennt, will ich hier nur die folgenden anführen,

$$\left. \begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, z^2) &= (1-z^2)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, z^2) \\ F(\alpha, \beta, \gamma, z^2) &= (1-z^2)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{z^2}{z^2-1}\right) \\ F(\alpha, \beta, \gamma, z^2) &= (1-z^2)^{-\beta} F\left(\gamma-\alpha, \beta, \gamma, \frac{z^2}{z^2-1}\right) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z^2) =$$

$$A z^{2(1-\gamma)} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, z^2) + B F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-z^2)$$

wo

$$A = \frac{\Pi(\gamma-1) \Pi(\alpha-\gamma) \Pi(\beta-\gamma)}{\Pi(1-\gamma) \Pi(\alpha-1) \Pi(\beta-1)}$$

$$B = \frac{\Pi(\alpha-\gamma) \Pi(\beta-\gamma)}{\Pi(\alpha+\beta-\gamma) \Pi(-\gamma)}$$

und überhaupt $\Pi(p)$ die Gaussische Π Function bedeutet: *Kummer* bezeichnet die beiden letzten dieser Gleichungen besonders als Fundamentalgleichungen für die Verwandlung der F Functionen, indem sich aus diesen alle übrigen ableiten lassen, in welchen alle vier Elemente von einander als unabhängig betrachtet werden.

9.

Vergleicht man die allgemeine Reihe (13) mit den Ausdrücken für $V_i^{(n)}$ des Art. 3, so findet man leicht dass

$$(16) \quad V_{\pm i}^{(n)} = (-1)^i B_{-n, i} \beta^i \cos^n \varphi (1 - \beta^2)^n F(n, n+i, i+1, \beta^2)$$

wo zur Abkürzung

$$B_{-n, i} = \frac{n \cdot n+1 \dots n+i-1}{1 \cdot 2 \dots i}$$

gesetzt ist, also $(-1)^i B_{-n, i}$ den i^{ten} Binominalcoefficienten der Potenz $-n$ bedeutet. Es ist hier immer i eine ganze positive Zahl, n kann aber jede beliebige Zahl sein. Dieser Ausdruck der VCoefficienten wird nur dann ein endlicher, wenn n eine ganze negative Zahl ist, durch Anwendung der ersten Verwandlungsformel (15) kann man ihn aber in einen andern umformen, welcher ein endlicher Ausdruck wird, wenn n eine ganze positive Zahl ist. Die Substitution dieser Relation giebt sofort

$$(17) \quad V_{\pm i}^{(n)} = (-1)^i B_{-n, i} \beta^i \cos^n \varphi (1 - \beta^2)^{-n+1} F(i+1-n, 1-n, i+1, \beta^2)$$

welches augenscheinlich eine endliche Function ist, wenn für n irgend eine ganze und positive Zahl substituirt wird. Schreiben wir für $i = 0$ die ersten Glieder hin:

$$V_0^{(n)} = \frac{\cos^n \varphi}{(1 - \beta^2)^{n-1}} \left\{ 1 + \frac{(n-1)^2}{1^2} \beta^2 + \frac{(n-1)^2 (n-2)^2}{1^2 \cdot 2^2} \beta^4 + \frac{(n-1)^2 (n-2)^2 (n-3)^2}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} \beta^6 + \text{etc.} \right\}$$

Wenn n klein ist, kann man aus diesem Ausdruck $V_0^{(n)}$ für jeden Werth von β mit Leichtigkeit berechnen. Die Anwendung der obigen zweiten und dritten Verwandlungsformeln würde andere Ausdrücke der VCoefficienten geben, die ich aber hier nicht anführen will, da sie sich jeder leicht hinschreiben kann.

Aus den beiden eben entwickelten Ausdrücken für $V_{\pm i}^{(n)}$ kann man eine nützliche Relation ableiten. Setzt man $-n$ für n in (16), so entsteht

$$V_{\pm i}^{(-n)} = B_{n, i} \beta^i \cos^{-n} \varphi (1 - \beta^2)^{-n} F(-n, i-n, i+1, \beta^2)$$

setzt man hingegen $n+1$ für n in (17), so kommt

$$V_{\pm i}^{(n+1)} = (-1)^i B_{-(n+1), i} \beta^i \cos^{n+1} \varphi (1 - \beta^2)^{-n} F(i-n, -n, i+1, \beta^2)$$

in welchen die F Functionen einander gleich sind, da man das erste und zweite Element einer jeden derselben mit einander verwechseln darf. Diese beiden Gleichungen geben

$$(18) \quad V_{\pm i}^{(-n)} = (-1)^i \frac{n \cdot n-1 \dots n-i+1}{n+1 \cdot n+2 \dots n+i} \frac{V_{\pm i}^{(n+1)}}{\cos^{2n+1} \varphi}$$

welche die VCoefficienten für ein negatives n aus denen für ein positives, und umgekehrt zum Theil, giebt.

10.

Durch angemessene Veränderung des vierten Elements der F Functionen kann man namentlich in den Fällen wo, wie hier, von den drei ersten Elementen nur zwei von einander unabhängig sind, Relationen

finden, *) die in den oben angeführten, allgemeinen nicht enthalten sind. Die zwei wichtigsten dieser will ich hier für den vorliegenden Fall entwickeln. Sei

$$F_1 = F(n, n+i, i+1, \beta^2)$$

dann giebt die allgemeine Differentialgleichung (14) leicht

$$\beta(1-\beta^2) \frac{d^2 F_1}{d\beta^2} + \{2i+1 - (4n+2i+1)\beta^2\} \frac{dF_1}{d\beta} - 4n(n+i)\beta F_1 = 0 \quad (19)$$

Setzt man hinein

$$F_1 = F_2(1+\beta^2)^{-(n+i)}$$

so geht sie über in

$$\beta(1-\beta^2)(1+\beta^2)^2 \frac{d^2 F_2}{d\beta^2} + \{2i+1 - 4(2n+i)\beta^2 + (2i-1)\beta^4\}(1+\beta^2) \frac{dF_2}{d\beta} - 4(n+i)(n+i+1)\beta(1-\beta^2)F_2 = 0$$

Macht man in dieser e durch die Gleichung

$$e = \frac{2\beta}{1+\beta^2}$$

zur unabhängigen Veränderlichen, so wird

$$e(1-e^2) \frac{d^2 F_2}{de^2} + \{2i+1 - 2(n+i+1)e^2\} \frac{dF_2}{de} - (n+i)(n+i+1)eF_2 = 0$$

Die Vergleichung dieser mit (14) zeigt, dass ihr durch

$$F_2 = c F\left(\frac{n+i}{2}, \frac{n+i+1}{2}, i+1, e^2\right)$$

Genüge geleistet wird, wo c eine willkürliche Constante ist. Zur Bestimmung dieser dient der specielle Fall $e=0$, welcher $\beta=0$ bedingt, und da in diesem Falle die F Functionen $=1$ werden, so findet man $c=1$. Substituirt man die vorstehenden Relationen in (16) und nimmt auf die Gleichungen

$$e = \sin \varphi, \quad \beta = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi, \quad \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2} = \cos \varphi, \quad \frac{1}{1+\beta^2} = \cos^2 \frac{1}{2} \varphi$$

Rücksicht, so wird

$$V_{\pm i}^{(n)} = (-1)^i B_{-n, i} \frac{\sin^i \varphi}{2^i} \cos^{2n} \varphi F\left(\frac{1+i+n}{2}, \frac{i+n}{2}, i+1, \sin^2 \varphi\right)$$

Dieser Ausdruck ist für jeden Werth von $\sin \varphi < 1$ eine convergirende Reihe, für ganze und negative Werthe von n gehen endliche Ausdrücke daraus hervor. Transformirt man die F Function durch die erste Verwandlungsformel (15), so kommt

$$V_{\pm i}^{(n)} = (-1)^i B_{-n, i} \frac{\sin^i \varphi}{2^i} \cos \varphi F\left(\frac{1+i-n}{2}, \frac{2+i-n}{2}, i+1, \sin^2 \varphi\right) \quad (20)$$

welche innerhalb derselben Grenzen wie die vorhergehende convergirende Reihen giebt, die sich in endliche Ausdrücke verwandeln, wenn n eine ganze und positive Zahl und grösser wie i ist. Für $i=0$ entstehen hieraus die beiden Ausdrücke

*) S. Kummers Abhandlung. Crelle's Journal B. 15.

$$V_0^{(n)} = \cos^{2n} \varphi \left\{ 1 + \frac{n \cdot n+1}{2 \cdot 2} \sin^2 \varphi + \frac{n \cdot n+1 \cdot n+2 \cdot n+3}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4} \sin^4 \varphi + \text{etc.} \right\}$$

$$V_0^{(n)} = \cos \varphi \left\{ 1 + \frac{n-1 \cdot n-2}{2 \cdot 2} \sin^2 \varphi + \frac{n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4} \sin^4 \varphi + \text{etc.} \right\}$$

Diese Ausdrücke der V Coefficienten bilden die eine der oben angekündigten Relationen, um die andere zu erhalten setzen wir

$$F_1 = F_3 (1+\beta)^{-2(n+i)}$$

in die Gleichung (14), die dadurch in folgende übergeht,

$$\beta (1-\beta) (1+\beta)^2 \frac{d^2 F_3}{d\beta^2}$$

$$+ \{2i+1 - 4(n+i)\beta + (2i-1)\beta^2\} (1+\beta) \frac{dF_3}{d\beta} - 2(2i+1)(n+i)(1-\beta) F_3 = 0$$

Macht man hierin η durch die Gleichung

$$\eta^2 = \frac{4\beta}{(1+\beta)^2}$$

zur unabhängigen Veränderlichen, so ergibt sich

$$\eta (1-\eta^2) \frac{d^2 F_3}{d\eta^2} + \{4i+1 - (2n+4i+2)\eta^2\} \frac{dF_3}{d\eta} - 2(2i+1)(n+i) \eta F_3 = 0$$

welcher durch

$$F_3 = c F\left(n+i, \frac{2i+1}{2}, 2i+1, \eta^2\right)$$

Genüge geleistet wird, und wo eben so wie oben $c=1$ gefunden wird.

Setzt man nun

$$\eta = \sin p$$

so giebt die obige Gleichung zwischen η und β

$$\cos p = \frac{1-\beta}{1+\beta} = \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)$$

und die Gleichung (16) geht über in

$$V_{\pm i}^{(n)} = (-1)^i B_{-n,i} \cos^n \varphi \cos^n p \frac{\sin^{2i} p}{2^{2i}} F\left(n+i, \frac{2i+1}{2}, 2i+1, \sin^2 p\right)$$

welche für $\sin p < 1$ stets eine convergirende Reihe ist, und einen endlichen Ausdruck giebt wenn $n+i$ eine ganze und negative Zahl ist. Durch Anwendung der ersten Gleichung (15) verwandelt sie sich in

$$V_{\pm i}^{(n)} = (-1)^i B_{-n,i} \frac{\cos^n \varphi}{\cos^{n-1} p} \cdot \frac{\sin^{2i} p}{2^{2i}} F\left(1+i-n, \frac{2i+1}{2}, 2i+1, \sin^2 p\right)$$

die unter denselben Bedingungen wie die vorstehende convergirt, und in einen endlichen Ausdruck übergeht wenn $n-i$ eine ganze und positive Zahl ist. Für $i=0$ ergeben sich daraus

$$V_0^{(n)} = \cos^n \varphi \cos^n p \left\{ 1 + \frac{n}{2} \sin^2 p + \frac{3}{2} \frac{n \cdot n+1}{2 \cdot 4} \sin^4 p + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 3} \frac{n \cdot n+1 \cdot n+2}{2 \cdot 4 \cdot 6} \sin^6 p + \text{etc.} \right\}$$

$$V_0^{(n)} = \frac{\cos^n \varphi}{\cos^{n-1} p} \left\{ 1 - \frac{n-1}{2} \sin^2 p + \frac{3}{2} \frac{n-1 \cdot n-2}{2 \cdot 4} \sin^4 p - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 3} \frac{n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \sin^6 p + \text{etc.} \right\}$$

Es lassen sich noch viele andere Verwandelungen hier hinzufügen, die ich aber übergehen werde, da sie hier keine sonderlichen Vortheile darbieten, die nicht schon in den vorstehenden enthalten wären.

Die drei Grössen e , β und η , oder wenn wir $\beta = \sin k$ setzen, φ , k und p sind zugleich Null, und zugleich jene $= 1$, und diese $= 90^\circ$; über dieses Intervall können sie nicht hinaus gehen. Die im Vorhergehenden entwickelten Ausdrücke sind nun vorzüglich für die Fälle zur Anwendung geeignet, wo φ , k und p sich nicht weit von ihrer unteren Grenze Null entfernen, während sie, namentlich wenn n nicht klein ist, unbequem werden wenn φ , k und p sich ihrer oberen Grenze nähern. Um Ausdrücke zu erhalten, die in diesem Falle bequem werden, muss man solche suchen, die nach den Potenzen von $\cos \varphi$, $\cos k$ und $\cos p$ fortschreiten. Mit diesen wollen wir uns jetzt beschäftigen. Machen wir in der allgemeinen Differentialgleichung (14) durch die Gleichung

$$y^2 = 1 - z^2$$

y zur unabhängigen Veränderlichen, so bekommen wir

$$y(1 - y^2) \frac{d^2 F}{dy^2} + \{2\alpha + 2\beta - 2\gamma + 1 - (2\alpha + 2\beta + 1)y^2\} \frac{dF}{dy} - 4\alpha\beta y F = 0$$

und die Vergleichung mit (14) zeigt, dass dieser durch die Relation

$$F = c F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - z^2)$$

Genüge geleistet wird, wo c eine willkürliche Constante ist. Es erwächst hieraus die Gleichung

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z^2) = c F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - z^2) \quad (21)$$

deren Realität von der Möglichkeit der Bestimmung der Constante c abhängt. Es zeigt sich aber, dass diese im Allgemeinen nicht möglich ist, indem Fälle vorkommen, wo sie sich wie eine Function von z gestaltet, welches vermöge der Art der Entstehung derselben unmöglich ist. Die Ursache hiervon ist leicht zu finden, wenn man erwägt, dass jede Differentialgleichung der m^{ten} Ordnung m von einander wesentlich verschiedene particuläre Integrale haben muss, das heisst Integrale die sich nicht durch Anbringung einer Constante auf einander hinführen lassen. Da die Differentialgleichung, von welcher wir ausgegangen sind, von der zweiten Ordnung ist, so muss sie nothwendig zwei von einander wesentlich verschiedene particuläre Integrale haben, und die beiden F Functionen, die Bestandtheile der vorstehenden Gleichung sind, sind in der That solche, da sie im Allgemeinen sich nicht identisch machen lassen, wie ihre Reihenentwicklung zu erkennen giebt.

Da unsere Differentialgleichung linearisch ist, so können wir zufolge eines bekannten Satzes aus diesen particulären Integralen das vollstän-

dige Integral derselben zusammensetzen. Stellen wir nemlich die Gleichung auf

$$U = cF(\alpha, \beta, \gamma, z^2) + c^1 F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - z^2)$$

wo c und c^1 willkürliche Constanten sind, so ist dieser Ausdruck das vollständige Integral der Differentialgleichung (14), nachdem darin U für F gesetzt worden ist. Aus dem vollständigen Integral irgend einer Differentialgleichung kann man dadurch, dass man den willkürlichen Constanten particuläre Werthe giebt, alle möglichen particulären Integrale derselben hervorbringen. Giebt man daher den Constanten c und c^1 in der vorstehenden Gleichung irgend welche bestimmte Werthe, so wird U ein particuläres Integral der genannten Differentialgleichung. Substituirt man im Gegentheil für U irgend ein particuläres Integral derselben Differentialgleichung, und bestimmt darauf die willkürlichen Constanten c und c^1 auf angemessene Art, so bekommt man eine Gleichung zwischen drei particulären Integralen. In diesen Betrachtungen liegt in der That der Grund zu der nach *Kummer* unter (15) angeführten letzten Verwandlungsformel. Ich habe dieses indessen nur beiläufig angeführt, und werde davon hier keine Anwendung machen, da es besondere Fälle giebt, in welchen die Gleichung (21) Gültigkeit hat, und es eben diese Fälle sind, die hier vorzugsweise in Betracht gezogen werden sollen.

Die Gleichung (21) gilt allemal, wenn die beiden F Functionen, die darin vorkommen, endliche Ausdrücke sind, die nicht unendlich gross werden können, denn es ist leicht einzusehen, dass alsdann die beiden Theile links und rechts vom Gleichheitszeichen sich durch angemessene Bestimmung der Constante c identisch machen lassen müssen. Sei zuerst in den F Functionen

$$\alpha = i + 1 - n, \quad \beta = 1 - n, \quad \gamma = i + 1, \quad z = \beta$$

dann wird vermöge (21)

$$(22^*) \quad F(i + 1 - n, 1 - n, i + 1, \sin^2 k) = c F(i + 1 - n, 1 - n, 2 - 2n, \cos^2 k)$$

oder wenn man die Reihen ausschreibt

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} &1 + \frac{n-i-1 \cdot n-1}{1 \cdot i+1} \sin^2 k + \frac{n-i-1 \cdot n-i-2 \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot i+1 \cdot i+2} \sin^4 k + \text{etc.} \\ &= c \left\{ 1 - \frac{n-i-1 \cdot n-1}{1 \cdot 2n-2} \cos^2 k + \frac{n-i-1 \cdot n-i-2 \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 2n-2 \cdot 2n-3} \cos^4 k + \text{etc.} \right\} \end{aligned} \right.$$

wo zu bemerken ist, dass die Factoren, die die Nenner gleich Null machen könnten, wenn n eine ganze und positive Zahl ist, sich immer zugleich in den Zählern vorfinden, und also dagegen verschwinden.

Wenn nun n eine beliebige Zahl ist, so ist c unbestimmbar. Auf der linken Seite ist

$$\alpha + \beta - \gamma = 1 - 2n$$

und auf der rechten

$$\alpha + \beta - \gamma = i$$

Wenn nun n negativ, oder positiv und $\leq \frac{1}{2}$ ist, dann wird, wenn man zugleich $k = 90^\circ$ setzt, die linke Seite von (22) unendlich gross, *) und die rechte Seite $= c$. Es würde also auch c unendlich gross sein müssen. Macht man, während n beliebig ist, $k = 0$, so wird die linke Seite von (22) $= 1$, während der Factor von c auf der rechten Seite unendlich gross wird, und dem zufolge c unendlich klein sein müsste. Nimmt man für n einen positiven Bruch an, dessen Nenner $= 2$ ist, so wird für jeden beliebigen Werth von k die rechte Seite unendlich gross, während dieses mit der linken Seite nicht der Fall ist; man wird also bei der Bestimmung von c auf Widersprüche hingeführt.

Ist hingegen n eine ganze und positive Zahl und $> i$, dann gehen beide Reihen in (22) in endliche Ausdrücke über, und c lässt sich auf folgende Art bestimmen. Das allgemeine Glied der linken Seite ist

$$= \frac{n-i-1 \cdot n-i-2 \dots n-i-m \cdot n-1 \cdot n-2 \dots n-m}{1 \cdot 2 \dots m \cdot i+1 \cdot i+2 \dots i+m} \sin^{2m} k$$

und das der rechten

$$= c (-1)^m \frac{n-i-1 \cdot n-i-2 \dots n-i-m \cdot n-1 \cdot n-2 \dots n-m}{1 \cdot 2 \dots m \cdot 2n-2 \cdot 2n-3 \dots 2n-m-1} \cos^{2m} k$$

im letzten mit der höchsten Potenz von $\sin k$ und bez. von $\cos k$ multiplicirten Glieder eines jeden dieser beiden Ausdrücke ist also

$$m = n - i - 1$$

Da nun in der Entwicklung von $\cos^{2m} k$ nach den Potenzen von $\sin k$ das Glied, welches mit der höchsten Potenz multiplicirt ist

$$= (-1)^m \sin^{2m} k$$

wird, so bekommen wir sogleich die Gleichung

$$\frac{1}{i+1 \cdot i+2 \dots n-1} = \frac{c}{2n-2 \cdot 2n-3 \dots n+i}$$

woraus

$$c = \frac{n+i \cdot n+i+1 \dots 2n-2}{i+1 \cdot i+2 \dots n-1}$$

folgt. Substituirt man daher (22*) in (17), so ergibt sich

$$V_{\pm i}^{(n)} = (-1)^i 2^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \dots 2n-3}{1 \cdot 2 \dots n-1} \frac{\cos n\varphi}{\cos^{2(n-1)} k} \sin^i k F(i+1-n, 1-n, 2-2n, \cos^2 k)$$

welche aber nur für ganze und positive n , welche überdies der Ungleich-

*) S. Gauss, Disquisitiones generales etc.

heit $n > i$ genügen, gilt. Auf ähnliche Art findet man die folgenden beiden, nach den Potenzen von $\cos \varphi$ und $\cos p$ fortschreitenden Ausdrücke,

$$V_{\pm i}^{(n)} = (-1)^i \frac{1 \cdot 3 \dots 2n-3}{1 \cdot 2 \dots n-1} \cos \varphi \sin^i \varphi F\left(\frac{1+i-n}{2}, \frac{2+i-n}{2}, \frac{3-2n}{2}, \cos^2 \varphi\right)$$

$$V_{\pm i}^{(n)} = \frac{(-1)^i}{2^{n-1}} \frac{1 \cdot 3 \dots 2n-3}{1 \cdot 2 \dots n-1} \frac{\cos^n \varphi}{\cos^{n-1} p} \sin^{2i} p F\left(1+i-n, \frac{2i+1}{2}, \frac{3-2n}{2}, \cos^2 p\right)$$

für welche die nemlichen Beschränkungen wie oben gelten. Für $n = i + 1$ werden in diesen Ausdrücken die F Functionen $= 1$, und die Ausdrücke für $V_{\pm(n-1)}^{(n)}$ reduciren sich also auf die vor den F Functionen befindlichen Factoren. Für $i = 0$ ergeben sich die folgenden Ausdrücke

$$V_0^{(n)} = 2^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \dots 2n-3}{1 \cdot 2 \dots n-1} \frac{\cos^n \varphi}{\cos^{2(n-1)} k} \left\{ 1 - \frac{n-1}{2} \cos^2 k + \frac{(n-1)(n-2)^2}{2 \cdot 2 \cdot 2n-3} \cos^4 k - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)^2}{2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 2n-3} \cos^6 k \pm \text{etc.} \right\}$$

$$V_0^{(n)} = \frac{1 \cdot 3 \dots 2n-3}{1 \cdot 2 \dots n-1} \cos \varphi \left\{ 1 - \frac{n-1 \cdot n-2}{2 \cdot 2n-3} \cos^2 \varphi + \frac{n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4}{2 \cdot 4 \cdot 2n-3 \cdot 2n-5} \cos^4 \varphi \mp \text{etc.} \right\}$$

$$V_0^{(n)} = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1 \cdot 3 \dots 2n-3}{1 \cdot 2 \dots n-1} \frac{\cos^n \varphi}{\cos^{n-1} p} \left\{ 1 + \frac{n-1}{2n-3} \cos^2 p + \frac{3 \cdot n-1 \cdot n-2}{2 \cdot 2n-3 \cdot 2n-5} \cos^4 p + \frac{3 \cdot 5 \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{2 \cdot 3 \cdot 2n-3 \cdot 2n-5 \cdot 2n-7} \cos^6 p \mp \text{etc.} \right\}$$

Auf die nemliche Art kann man Ausdrücke ableiten, die bloß Geltung haben wenn n eine ganze und negative Zahl ist, man gelangt aber durch Anwendung der ersten Gleichung (15) leichter dazu. Substituirt man darin die obigen drei Ausdrücke für $V_{\pm i}^{(n)}$, so bekommt man sogleich,

$$V_{\pm i}^{(-n)} = \frac{n+i+1 \cdot n+i+2 \dots 2n}{1 \cdot 2 \dots n-i} \cdot \frac{\sin^i k}{\cos^n \varphi \cos^{2n} k} F(i-n, -n, -2n, \cos^2 k)$$

$$V_{\pm i}^{(-n)} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{n+i+1 \cdot n+i+2 \dots 2n}{1 \cdot 2 \dots n-i} \cdot \frac{\sin^i \varphi}{\cos^{2n} \varphi} F\left(\frac{i-n}{2}, \frac{1+i-n}{2}, \frac{1-2n}{2}, \cos^2 \varphi\right)$$

$$V_{\pm i}^{(-n)} = \frac{1}{2^{2n}} \frac{n+i+1 \cdot n+i+2 \dots 2n}{1 \cdot 2 \dots n-i} \cdot \frac{\sin^{2i} p}{\cos^n \varphi \cos^n p} F\left(i-n, \frac{2i+1}{2}, \frac{1-2n}{2}, \cos^2 p\right)$$

wo $n \geq i$ die Grenzbedingung von n ist. Für $n = i$ werden wieder die F Functionen $= 1$, also reduciren sich die Ausdrücke für $V_{\pm n}^{(-n)}$ auf die vor den F Functionen befindlichen Factoren; für $i = 0$ bekommt man

$$V_0^{(-n)} = \frac{n+1 \cdot n+2 \dots 2n}{1 \cdot 2 \dots n} \frac{1}{\cos^n \varphi \cos^{2n} k} \left\{ 1 - \frac{n^2}{4 \cdot 2n} \cos^2 k + \frac{n^2 (n-1)^2}{4 \cdot 2 \cdot 2n \cdot 2n-1} \cos^4 k \mp \text{etc.} \right\}$$

$$V_0^{(-n)} = \frac{1}{2^n} \frac{n+1 \cdot n+2 \dots 2n}{1 \cdot 2 \dots n} \frac{1}{\cos^{2n} \varphi} \left\{ 1 - \frac{n \cdot n-1}{2 \cdot 2n-1} \cos^2 \varphi + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{2 \cdot 4 \cdot 2n-1 \cdot 2n-3} \cos^4 \varphi \mp \text{etc.} \right\}$$

$$V_0^{(-n)} = \frac{1}{2^{2n}} \frac{n+1 \cdot n+2 \dots 2n}{1 \cdot 2 \dots n} \frac{1}{\cos^n \varphi \cos^n p} \left\{ 1 + \frac{n}{2n-1} \cos^2 p + \frac{3 \cdot n \cdot n-1}{2 \cdot 2n-1 \cdot 2n-3} \cos^4 p + \frac{3 \cdot 5 \cdot n \cdot n-1 \cdot n-2}{2 \cdot 3 \cdot 2n-1 \cdot 2n-3 \cdot 2n-5} \cos^6 p \mp \text{etc.} \right\}$$

12.

Durch Anwendung der zweiten und dritten der Verwandlungsformeln (15) kann man die im Vorhergehenden entwickelten Ausdrücke auf solche hinführen, die nach den Potenzen der Tangente oder Cotangente irgend eines der Bögen k , φ oder p fortschreiten; ich werde jedoch davon hier nur die beiden von $\cotg p$ abhängigen Ausdrücke ab-

leiten. Setzt man die dritte Gleichung (15) in die beiden von $\cos p$ abhängigen Ausdrücke des vor. Art., so kommt sogleich

$$V_{\pm i}^{(n)} = \frac{(-1)^i}{2^{n-1}} \frac{1 \cdot 3 \dots 2n-3}{1 \cdot 2 \dots n-1} \frac{\cos^n p}{\cos^{n-1} p \sin p} F\left(\frac{1-2i}{2}, \frac{2i+1}{2}, \frac{3-2n}{2}, -\cotg^2 p\right)$$

$$V_{\pm i}^{(-n)} = \frac{1}{2^{2n}} \frac{n+i+1 \cdot n+i+2 \dots 2n}{1 \cdot 2 \dots n-i} \cdot \frac{1}{\cos^n p \cos^n p \sin p} F\left(\frac{1-2i}{2}, \frac{2i+1}{2}, \frac{1-2n}{2}, -\cotg^2 p\right)$$

Diese sind zwar unendliche Reihen, aber sie gelten demungeachtet unter den für n im vor. Art. aufgestellten Bedingungen, weil die Relation (15) die angewandt worden ist, um sie zu erhalten, in allen Fällen gilt. Die vorstehenden Ausdrücke besitzen die Eigenschaft, dass in den unendlichen Reihen derselben n nur in den Nennern der Coefficienten vorkommt, je grösser daher n ist, desto mehr werden die Coefficienten abnehmen, weshalb sie sich besonders in den Fällen, wo n sehr gross ist, zur Anwendung eignen. Wenn $\cotg p < 1$ ist convergiren diese Reihen, aber wenn diese Ungleichheit nicht erfüllt ist, so findet die Convergenz nicht mehr statt. Der Umstand aber, dass n nur in den Nennern vorkommt, bewirkt dass in den Fällen, wo $\cotg p > 1$, und dabei n hinreichend gross ist, die ersten Glieder abnehmen können, so dass diese Reihen den Character der sogenannten halbconvergirenden annehmen. Es ist jedoch hiebei zu bemerken, dass der Umstand, dass die Nenner nach und nach die Factoren $1-2n$, $3-2n$, $5-2n$, etc. bekommen hemmend auf die Abnahme der Werthe der Coefficienten wirkt, und die Reihen daher, als halbconvergirende betrachtet, keine sonderliche Genauigkeit geben können. Ich füge hier noch den ersten Ausdruck für $i = 0$ ausgeschrieben hinzu.

$$V_0^{(n)} = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1 \cdot 3 \dots 2n-3}{1 \cdot 2 \dots n-1} \frac{\cos^n p}{\cos^{n-1} p \sin p} \left\{ 1 + \frac{1^2}{2 \cdot 2n-3} \cotg^2 p + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2 \cdot 4 \cdot 2n-3 \cdot 2n-5} \cotg^4 p + \text{etc.} \right\}$$

13.

Es lässt sich für grosse n eine andere halbconvergirende Reihe geben, die grössere Convergenz besitzt wie die vorstehende. Diese will ich jetzt entwickeln, werde mich aber nur auf den Fall $i = 0$ beschränken, da dieser es ist, welcher vorzugsweise zur Anwendung kommt. Nehmen wir die Gleichung (19) vor, welche für $i = 0$ in folgende übergeht.

$$\beta(1-\beta^2) \frac{d^2 F}{d\beta^2} + \{1-(4n+1)\beta^2\} \frac{dF}{d\beta} - 4n^2 \beta F = 0 \quad (23^*)$$

Zufolge des Vorhergehenden erhalten wir, wenn hiedurch F bestimmt worden ist,

$$V_0^{(n)} = \cos^n \varphi (1 - \beta^2)^n F$$

Auf die vorstehende Differentialgleichung werde ich nun dieselbe Methode, jedoch mit den im gegenwärtigen Falle nothwendigen Abänderungen, anwenden, durch welche ich in den »Absoluten Störungen etc.« die *I* Functionen in eine halbconvergirende Reihe verwandelt habe. Es muss vor allen Dingen in dem zweiten Gliede dieser Differentialgleichung das mit n multiplicirte Glied fortgeschafft werden, und man findet leicht auf directe Art, dass dieser Zweck durch die Substitution

$$F = \frac{L}{(1 - \beta^2)^n}$$

erreicht wird. Führt man diese aus, so bekommt man

$$\beta(1 - \beta^2)^2 \frac{d^2 L}{d\beta^2} + (1 - \beta^2)^2 \frac{dL}{d\beta} - 4n(n - 1)\beta L = 0$$

und in dieser befreit man das erste und letzte Glied von β , wenn man

$$u = \log \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

setzt, und u zur unabhängigen Veränderlichen macht. Es ergibt sich

$$\frac{d^2 L}{du^2} + \frac{1 + \beta^2}{\beta} \frac{dL}{du} - 4n(n - 1)L = 0$$

14.

Die eben gefundene Gleichung stelle ich wie folgt

$$(23) \quad \frac{d^2 L}{du^2} - 4\lambda^2 L = -\frac{1 + \beta^2}{\beta} \frac{dL}{du} - L$$

wo

$$\lambda = n - \frac{1}{2}$$

ist, und integrire sie vorläufig indem ich die rechte Seite gleich Null setze. Dadurch wird

$$(24) \quad L = w c^{2\lambda u} + w^1 c^{-2\lambda u}$$

wo w und w^1 die willkürlichen Constanten sind, und c die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bedeutet. Das Integral der vollständigen Gleichung erlangt man nun dadurch, dass w und w^1 veränderlich gesetzt, und als Functionen von u betrachtet werden. An sich liefert die Lösung dieser Aufgabe nur Eine Gleichung zur Bestimmung der beiden Grössen w und w^1 , und man kann daher die eine derselben willkürlich annehmen, oder vielmehr eine willkürliche Bedingung einführen. In den gewöhnlichen Fällen fügt man die Bedingung hinzu, dass das erste Differential der abhängigen Veränderlichen dieselbe Form erhalten soll, wie in dem Falle, wo die willkürlichen Constanten unveränderlich sind. Diese Bedingung würde aber hier nicht zum Ziele führen, ich werde sie daher nicht anwenden, sondern statt dessen, ähnlich wie a. a. O. die

Bedingung aufstellen, dass nach der Substitution von (24) in (23) die Coefficienten der mit $c^{2\lambda u}$ und $c^{-2\lambda u}$ multiplicirten Glieder, jeder für sich, gleich Null sein sollen. Differentiirt man nun (24), und substituirt sie in (23), so bekommt man mit Zugrundelegung dieser Bestimmung für die Bestimmung von w und w^1 folgende Gleichungen

$$4\lambda \left\{ \frac{dw}{du} + \frac{1+\beta^2}{2\beta} w \right\} = -\frac{d^2w}{du^2} - \frac{1+\beta^2}{\beta} \frac{dw}{du} - w$$

$$4\lambda \left\{ \frac{dw^1}{du} + \frac{1+\beta^2}{2\beta} w^1 \right\} = \frac{d^2w^1}{du^2} + \frac{1+\beta^2}{\beta} \frac{dw^1}{du} + w^1$$

Da diese Differentialgleichungen zweiter Ordnung sind, so wird ihre vollständige Integration vier willkürliche Constanten einführen, welche aber nothwendig nach der Substitution der durch diese Integrationen erlangten Werthe von w und w^1 in (24) zu zwei Constanten sich zusammen ziehen müssen, indem der Ausdruck von L nur zwei willkürliche Constanten enthalten kann. Hieraus folgt, dass wir nur nöthig haben von jeder der beiden vorstehenden Gleichungen ein particuläres Integral zu ermitteln, welches Eine willkürliche Constante enthält. Aber diese Gleichungen sind linearische, in welchen kein von w und bez. w^1 unabhängiges Glied enthalten ist, wenn man also zwei Functionen

$$w = fu, \quad w^1 = Fu$$

kennt, die ihnen Genüge leisten, so leisten auch die Ausdrücke

$$w = cfu, \quad w^1 = c^1Fu$$

wo c und c^1 willkürliche Constanten sind, ihnen Genüge. Hieraus folgt, dass man den obigen Gleichungen nur Genüge zu leisten braucht. Ferner geben die obigen Gleichungen zu erkennen, dass wenn der ersten derselben durch folgenden Ausdruck Genüge geleistet wird,

$$w = C_0 + \frac{C_1}{\lambda} + \frac{C_2}{\lambda^2} + \frac{C_3}{\lambda^3} + \text{etc.}$$

wo $C_0, C_1, \text{etc.}$ Functionen von u sind, die kein λ enthalten, so wird der zweiten nothwendig durch den folgenden Ausdruck Genüge geleistet,

$$w^1 = C_0 - \frac{C_1}{\lambda} + \frac{C_2}{\lambda^2} - \frac{C_3}{\lambda^3} \pm \text{etc.}$$

Man braucht also nur der ersten derselben Genüge zu leisten, und erhält dadurch zufolge des Vorhergehenden die hier erforderlichen particulären Integrale beider.

15.

Die Gleichung

$$4\lambda \left\{ \frac{dw}{du} + \frac{1+\beta^2}{2\beta} w \right\} = -\frac{d^2w}{du^2} - \frac{1+\beta^2}{\beta} \frac{dw}{du} - w$$

kann vereinfacht werden. Setzt man

$$z = \sqrt{\frac{1-\beta^2}{\beta}}$$

woraus vermöge der Relation $u = \log \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$

$$\frac{1+\beta^2}{2\beta} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}z^4}$$

$$\frac{dz}{du} = -z \sqrt{1 + \frac{1}{4}z^4}$$

$$\frac{d^2z}{du^2} = z + \frac{3}{4}z^5$$

folgt, so geht sie über in

$$16\lambda \left\{ \frac{dw}{dz} z - w \right\} \sqrt{1 + \frac{1}{4}z^4} = \frac{d^2w}{dz^2} (z^6 + 4z^2) + \frac{dw}{dz} (z^5 - 4z) + 4w$$

Wenn man hierin den obigen Ausdruck

$$w = C_0 + \frac{C_1}{\lambda} + \frac{C_2}{\lambda^2} + \frac{C_3}{\lambda^3} + \text{etc.}$$

substituirt, so bekommt man, da die C Coefficienten kein λ enthalten sollen, allgemein

$$16 \left\{ \frac{dC_i}{dz} z - C_i \right\} \sqrt{1 + \frac{1}{4}z^4} = \frac{d^2C_{i-1}}{dz^2} (z^6 + 4z^2) + \frac{dC_{i-1}}{dz} (z^5 - 4z) + 4C_{i-1}$$

mit Ausnahme von

$$\frac{dC_0}{dz} z - C_0 = 0$$

Hieraus kann man nach und nach alle C Coefficienten bestimmen. Der Gleichung für C_0 ist durch

$$C_0 = z$$

Genüge geleistet; hiemit giebt die allgemeine Gleichung

$$\frac{dC_1}{dz} z - C_1 = \frac{z^5}{16 \sqrt{1 + \frac{1}{4}z^4}}$$

welcher durch

$$C_1 = \frac{1}{8} z \sqrt{1 + \frac{1}{4}z^4}$$

Genüge geleistet wird. Die Substitution dieses Werthes in die allgemeine Gleichung giebt

$$\frac{dC_2}{dz} z - C_2 = \frac{9}{128} z^5$$

welcher durch

$$C_2 = \frac{9}{512} z^5$$

Genüge geleistet wird u. s. w. Diese Werthe geben schon die allgemeine Form dieser Coefficienten zu erkennen. Wenn

i eine grade Zahl

ist, dann wird

$$C_i = A_{2i+1}^{(i)} z^{2i+1} + A_{2i-3}^{(i)} z^{2i-3} + \dots + A_9^{(i)} z^9 + A_5^{(i)} z^5$$

$$C_{i+1} = \left\{ A_{2i+1}^{(i+1)} z^{2i+1} + A_{2i-3}^{(i)} z^{2i-3} + \dots + A_5^{(i+1)} z^5 + A_1^{(i+1)} z \right\} \sqrt{1 + \frac{1}{4}z^4}$$

wobei der particuläre Werth $C_0 = z$ ausgeschlossen ist. Wenn

i eine ungrade Zahl

ist, dann wird

$$C_i = \{A_{2i-1}^{(i)} z^{2i-1} + A_{2i-5}^{(i)} z^{2i-5} + \dots + A_5^{(i)} z^5 + A_1^{(i)} z\} \sqrt{1 + \frac{1}{4} z^4}$$

$$C_{i+1} = A_{2i+3}^{(i+1)} z^{2i+3} + A_{2i-1}^{(i+1)} z^{2i-1} + \dots + A_9^{(i+1)} z^9 + A_5^{(i+1)} z^5$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die obige allgemeine Gleichung, und vergleicht die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von z mit einander, so ergibt sich

1) für i grade

$$8(i+1) A_{2i+1}^{(i+1)} = (2i+1)^2 A_{2i+1}^{(i)}$$

$$8(i-1) A_{2i-3}^{(i+1)} = 16i^2 A_{2i+1}^{(i)} + (2i-3)^2 A_{2i-3}^{(i)} - 32i A_{2i+1}^{(i+1)}$$

$$8(i-3) A_{2i-7}^{(i+1)} = 16(i-2)^2 A_{2i-3}^{(i)} + (2i-7)^2 A_{2i-7}^{(i)} - 32(i-2) A_{2i-3}^{(i+1)}$$

etc. bis

$$24 A_5^{(i+1)} = 256 A_9^{(i)} + 25 A_5^{(i)} - 128 A_9^{(i+1)}$$

$$8 A_1^{(i+1)} = 64 A_5^{(i)} - 64 A_5^{(i+1)}$$

2) für i ungrade

$$32(i+1) A_{2i+3}^{(i+1)} = (2i+1)^2 A_{2i+1}^{(i)}$$

$$32(i-1) A_{2i-1}^{(i+1)} = 16(i-4)^2 A_{2i+1}^{(i)} + (2i-3)^2 A_{2i-5}^{(i)}$$

$$32(i-3) A_{2i-5}^{(i+1)} = 16(i-3)^2 A_{2i-5}^{(i)} + (2i-7)^2 A_{2i-9}^{(i)}$$

etc. bis

$$128 A_9^{(i+1)} = 256 A_9^{(i)} + 49 A_5^{(i)}$$

$$64 A_5^{(i+1)} = 64 A_5^{(i)} + 9 A_1^{(i)}$$

Durch Hülfe dieser Gleichungen und mit Zuziehung des Werthes

$$A_1^{(0)} = 1$$

kann man nach und nach so viele Coefficienten berechnen wie man will. Die ersten, mit welchen man wohl stets ausreicht, habe ich wie folgt gefunden:

$$A_1^{(1)} = \frac{1}{8}; \quad A_5^{(2)} = \frac{9}{512}; \quad A_5^{(3)} = \frac{75}{4096}; \quad A_1^{(3)} = -\frac{3}{512}; \quad A_9^{(4)} = \frac{3675}{524288};$$

$$A_5^{(4)} = \frac{573}{32768}; \quad A_9^{(5)} = \frac{59535}{4494304}; \quad A_5^{(5)} = \frac{2265}{131072}; \quad A_1^{(5)} = \frac{27}{16384};$$

$$A_{13}^{(6)} = \frac{2401245}{268435456}; \quad A_9^{(6)} = \frac{587265}{16777216}; \quad A_5^{(6)} = \frac{18363}{1048576}; \quad A_{13}^{(7)} = \frac{57972915}{2147483648};$$

$$A_9^{(7)} = \frac{18821565}{268435456}; \quad A_5^{(7)} = \frac{296355}{16777216}; \quad A_1^{(7)} = -\frac{2547}{2097152}.$$

Die oben angewandten Substitutionen waren, wenn man $\cos \varphi$ durch β ausdrückt

$$V_0^{(n)} = \frac{(1-\beta^2)^{2n}}{(1+\beta^2)^n} F; \quad F = \frac{L}{(1-\beta^2)^n}; \quad u = \log \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

$$z = \sqrt{\frac{1-\beta^2}{\beta}}; \quad \lambda = n - \frac{1}{2}$$

da nun hieraus

$$V_0^{(n)} = \frac{(1-\beta^2)^n}{(1+\beta^2)^n} L; \quad c^{2\lambda u} = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{n-\frac{1}{2}}$$

hervorgeht, so ergibt sich

$$V_0^{(n)} = c \frac{(1+\beta)^{2n}}{(1+\beta^2)^n} \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \left\{ z + \frac{C_1}{\lambda} + \frac{C_2}{\lambda^2} + \frac{C_3}{\lambda^3} + \text{etc.} \right\} \\ + c^1 \frac{(1-\beta)^{2n}}{(1+\beta^2)^n} \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \left\{ z - \frac{C_1}{\lambda} + \frac{C_2}{\lambda^2} - \frac{C_3}{\lambda^3} \pm \text{etc.} \right\}$$

wo c und c^1 die beiden willkürlichen Constanten, und

$$C_1 = \frac{1}{8} z \sqrt{1 + \frac{1}{4} z^4}$$

$$C_2 = \frac{9}{512} z^5$$

$$C_3 = \left\{ \frac{75}{4096} z^5 - \frac{3}{512} z \right\} \sqrt{1 + \frac{1}{4} z^4}$$

$$C_4 = \frac{3675}{524288} z^9 + \frac{573}{32768} z^5$$

$$C_5 = \left\{ \frac{59535}{4494304} z^9 + \frac{2265}{434072} z^5 + \frac{27}{46384} z \right\} \sqrt{1 + \frac{1}{4} z^4}$$

$$C_6 = \frac{2401245}{268435456} z^{13} + \frac{587265}{46777216} z^9 + \frac{48363}{4048576} z^5$$

$$C_7 = \left\{ \frac{57972945}{2447483648} z^{13} + \frac{48824565}{268435456} z^9 + \frac{296355}{46777216} z^5 - \frac{2547}{2097452} z \right\} \sqrt{1 + \frac{1}{4} z^4}$$

etc.

Man kann diese Ausdrücke für die Rechnung geeigneter machen, wenn man φ einführt, man findet leicht

$$z = \sqrt{\frac{2}{\operatorname{tg} \varphi}}; \quad \sqrt{1 + \frac{1}{4} z^4} = \frac{1}{\sin \varphi}$$

und

$$V_0^{(n)} = c \cos^n \varphi \cotg^\lambda (45^\circ - \frac{1}{2} \varphi) \left\{ z + \frac{C_1}{\lambda} + \frac{C_2}{\lambda^2} + \frac{C_3}{\lambda^3} + \text{etc.} \right\} \\ + c^1 \cos^n \varphi \operatorname{tg}^\lambda (45^\circ - \frac{1}{2} \varphi) \left\{ z - \frac{C_1}{\lambda} + \frac{C_2}{\lambda^2} - \frac{C_3}{\lambda^3} \pm \text{etc.} \right\}$$

An der Grenze $\varphi = 0$ wird dieser Ausdruck unbrauchbar, weil dann $z = \infty$ wird, an der Grenze $\varphi = 90^\circ$ scheint er unbestimmt zu werden, weil dann $\cotg (45^\circ - \frac{1}{2} \varphi) = \infty$ und $\cos \varphi = 0$ wird, aber der obige Ausdruck durch β zeigt, dass alsdann $V_0^{(n)} = 0$ wird, man kann also den vorstehenden Ausdruck bis an diese Grenze anwenden, und zwar für desto kleinere Werthe von λ , je näher φ dieser Grenze liegt, weil dann z klein wird. Wenn φ sich wenig von der unteren Grenze Null entfernt, dann giebt dieser Ausdruck für kleine Werthe von λ nur geringe Genauigkeit, aber diese wächst, so wie λ grösser wird, und kann auch in diesen Fällen, wenn nur λ hinreichend gross angenommen wird, zu jeder beliebigen Grenze gesteigert werden. Der Umstand, dass für dieselben Werthe von λ oder n die vorstehende Formel für kleine Werthe von φ geringere Genauigkeit giebt, wie für grössere, gleicht sich dadurch in der Anwendung aus, dass man in diesen Fällen die obigen

endlichen Ausdrücke oder die convergirenden Reihen ohne Unbequemlichkeit für grössere Werthe von n anwenden kann. Die Grösse z nimmt schon für kleine Werthe von φ rasch ab, wie die folgenden speciellen Werthe zeigen

$$\begin{aligned}\varphi = 0 & \text{ giebt } z = \infty \\ \varphi = 1^0 & \text{ „ } z = 10,70 \\ \varphi = 2^0 & \text{ „ } z = 7,57 \\ \varphi = 3^0 & \text{ „ } z = 6,18 \\ \varphi = 4^0 & \text{ „ } z = 5,35 \\ \varphi = 5^0 & \text{ „ } z = 4,78 \\ & \text{etc.}\end{aligned}$$

Ich bemerke noch hiezu, dass das Verfahren, welches ich eben auf $V_0^{(n)}$ angewandt habe, mit geringen Abänderungen auf jede Function y von x angewandt werden kann, die sich durch folgende Differentialgleichung darstellen lässt,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (nP + Q) \frac{dy}{dx} \pm (n^2 R + nS + T)y = 0$$

wo P, Q, R, S, T Functionen von x sind. Denn die Transformationen, die ich eben auf die Gleichung (23*) angewandt habe, lassen sich allgemein mittelst bekannter Sätze auf die vorstehende Gleichung anwenden. Nur ist hiebei zu bemerken, dass wenn ausser n in den Coefficienten dieser Gleichung grosse Zahlen vorkommen, die Convergenz der halbconvergirenden Reihe sehr gering, und sogar illusorisch werden kann.

16.

Um die beiden willkürlichen Constanten c und c^1 zu bestimmen, werde ich die ersten Glieder des Ausdrucks von $V_0^{(n)}$ auf eine andere Art, die keine willkürliche Constanten zulässt, bestimmen. Der Ausdruck des vor. Art. von $V_0^{(n)}$ durch β giebt mit bloßer Rücksicht auf diese Glieder

$$V_0^{(n)} = \frac{c}{\sqrt{\beta}} \frac{(1+\beta)^{2n}(1-\beta)}{(1+\beta^2)^n} + \frac{c^1}{\sqrt{\beta}} \frac{(1-\beta)^{2n}(1+\beta)}{(1+\beta^2)^n} \quad (25)$$

und es ist leicht zu erkennen, dass diese Functionen von β sich in keinem der übrigen Glieder wiederholen. Denselben Ausdruck werde ich jetzt durch das bestimmte Integral

$$V_0^{(n)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi^n df$$

suchen. Da

$$\varphi = 1 - e \cos \varepsilon = \frac{1}{1+\beta^2} (1 - 2\beta \cos \varepsilon + \beta^2), \quad df = \frac{\cos \varphi}{e} d\varepsilon$$

ist, wenn ε die excentrische Anomalie bezeichnet, so wird

$$V_0^{(n)} = \frac{1-\beta^2}{\pi(1+\beta^2)^n} \int_0^\pi (1-2\beta \cos \varepsilon + \beta^2)^{n-1} d\varepsilon$$

Sei

$$1-2\beta \cos \varepsilon + \beta^2 = (1+\beta)^2 c^{-\frac{u^2}{\lambda}}$$

wo c die Grundzahl der natürlichen Logarithmen, und u eine neue veränderliche Grösse ist. Setzt man nun

$$q = \sqrt{2\lambda \log \frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

so durchläuft u das Intervall von $u = q$ bis $u = 0$, während ε das Intervall von $\varepsilon = 0$ bis $\varepsilon = \pi$ durchläuft. Macht man daher im vorstehenden Integral u zur veränderlichen Grösse, und kehrt das Zeichen desselben um, so muss es von 0 bis q genommen werden. Die Gleichung zwischen ε und u giebt

$$\cos \varepsilon = \frac{1+\beta^2}{2\beta} - \frac{(1+\beta)^2}{2\beta} c^{-\frac{u^2}{\lambda}}$$

$$\sin \varepsilon d\varepsilon = -\frac{(1+\beta)^2}{\beta} \frac{u}{\lambda} c^{-\frac{u^2}{\lambda}} du$$

$$\sin^2 \varepsilon = \frac{(1+\beta)^2}{2\beta^2} c^{-\frac{u^2}{\lambda}} \left\{ 1 + \beta^2 - \frac{(1-\beta)^2}{2} c^{\frac{u^2}{\lambda}} - \frac{(1+\beta)^2}{2} c^{-\frac{u^2}{\lambda}} \right\}$$

oder wenn man die Exponentialfunctionen innerhalb der Klammern in unendliche Reihen auflöst,

$$\sin^2 \varepsilon = \frac{(1+\beta)^2}{\beta} \frac{u^2}{\lambda} c^{-\frac{u^2}{\lambda}} \left\{ 1 - \frac{1+\beta^2}{4\beta} \frac{u^2}{\lambda} + \frac{1}{6} \frac{u^4}{\lambda^2} - \frac{1+\beta^2}{48\beta} \frac{u^6}{\lambda^3} + \frac{1}{120} \frac{u^8}{\lambda^4} + \text{etc.} \right\}$$

Substituirt man diese Ausdrücke, so wird

$$V_0^{(n)} = \frac{(1+\beta)^{2n}(1-\beta)}{\pi(1+\beta^2)^n \sqrt{\lambda\beta}} \int_0^q du c^{-u^2} \left\{ 1 - \frac{1+\beta^2}{4\beta} \frac{u^2}{\lambda} + \frac{1}{6} \frac{u^4}{\lambda^2} - \frac{1+\beta^2}{48\beta} \frac{u^6}{\lambda^3} + \frac{1}{120} \frac{u^8}{\lambda^4} + \text{etc.} \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

Man kann diesen Ausdruck mittelst bekannter Sätze durch unendliche Reihen vollständig integrieren, und die Reihen, die man auf diese Art erhält, sind vollständig convergirende, aber sie enthalten λ auch zu positiven Potenzen erhoben, und sind daher für den Zweck, der hier verfolgt wird, nicht dienlich. Ich bemerke aber, dass je grösser λ wird, desto mehr sich die obere Grenze des Integrals dem Unendlichen nähert. Integriert man daher von 0 bis ∞ , so wird man zwar keine vollständig convergirende Reihe bekommen, aber eine solche die sich einer convergirenden desto mehr nähert, je grösser λ oder n wird, das ist eine halb convergirende Reihe. Denn der wesentliche Charakter einer halb convergirenden Reihe besteht darin, dass sie sich um desto mehr einer vollständig convergirenden nähert, je mehr ein darin vorkommender Parameter sich einer gewissen Grenze, gewöhnlich dem Unendlichen, nähert.

Vergleicht man nun den eben erhaltenen Ausdruck für $V_0^{(n)}$ mit (25), so ergibt sich sogleich, dass man um das erste Glied desselben zu erhalten, unter dem Integralzeichen nur die Glieder aufnehmen darf, die nach der Reihenentwicklung unabhängig von β sind, so wie dass Glieder von der Form des zweiten Gliedes in (25) gar nicht vorhanden sind. Die Reihenentwicklung des vorstehenden Ausdrucks giebt mit bloßer Rücksicht auf die genannten Glieder,

$$\int_0^\infty du e^{-u^2} \left\{ 1 - \frac{7}{192} \frac{u^4}{\lambda^2} + \frac{77}{81920} \frac{u^8}{\lambda^4} + \text{etc.} \right\}$$

und also da

$$\int_0^\infty du e^{-u^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}; \quad \int_0^\infty u^4 du e^{-u^2} = \frac{3}{8} \sqrt{\pi}; \quad \int_0^\infty u^8 du e^{-u^2} = \frac{105}{32} \sqrt{\pi}$$

ist,

$$V_0^{(n)} = \frac{(1+\beta)^{2n} (1-\beta)}{2(1+\beta^2)^n \sqrt{\lambda} \cdot \sqrt{\lambda\pi}} \left\{ 1 - \frac{7}{256 \lambda^2} + \frac{1617}{262144 \lambda^4} + \text{etc.} \right\}$$

Die Vergleichung dieses Ausdrucks mit (25) giebt

$$c = \frac{1}{2 \sqrt{\lambda\pi}} \left\{ 1 - \frac{7}{256 \lambda^2} + \frac{1617}{262144 \lambda^4} + \text{etc.} \right\}$$

$$c^1 = 0$$

und es wird daher schliesslich

$$V_0^{(n)} = \frac{k}{2 \sqrt{\lambda\pi}} \cos^n \varphi \operatorname{tg}^\lambda (45^\circ + \frac{1}{2} \varphi) \left\{ z + \frac{C_1}{\lambda} + \frac{C_2}{\lambda^2} + \frac{C_3}{\lambda^3} + \text{etc.} \right\}$$

wo $k = 1 - \frac{7}{256 \lambda^2} + \frac{1617}{262144 \lambda^4} + \text{etc.}$

und $z, C_1, C_2, \text{etc.}$ die oben gegebenen Werthe haben.

17.

Der eben für $V_0^{(n)}$ gefundene Ausdruck gilt für jeden positiven Werth von n , vorausgesetzt dass dieser hinreichend gross ist, um die gewünschte Convergenz oder den gewünschten Grad von Genauigkeit zu erhalten, für negative Werthe von n hingegen wird er wegen $\sqrt{\lambda}$ imaginär; es ist also noch für diese Fälle der analoge Ausdruck zu entwickeln.

In allen durch die unbestimmten Integrationen erlangten Ausdrücken darf man ohne Weiteres $-n$ statt n setzen. Wir bekommen daher aus dem Art. 15

$$V_0^{(-n)} = c \frac{(1+\beta^2)^n}{(1+\beta)^{2n}} \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \left\{ z - \frac{C_1}{\mu} + \frac{C_2}{\mu^2} + \text{etc.} \right\} \\ + c^1 \frac{(1+\beta^2)^n}{(1-\beta)^{2n}} \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \left\{ z + \frac{C_1}{\mu} + \frac{C_2}{\mu^2} + \text{etc.} \right\}$$

oder

$$V_0^{(-n)} = \frac{c}{\cos^n \varphi} \operatorname{tg}^\mu (45^\circ - \frac{1}{2} \varphi) \left\{ z - \frac{C_1}{\mu} + \frac{C_2}{\mu^2} + \text{etc.} \right\} \\ + \frac{c^1}{\cos^n \varphi} \operatorname{cotg}^\mu (45^\circ - \frac{1}{2} \varphi) \left\{ z + \frac{C_1}{\mu} + \frac{C_2}{\mu^2} + \text{etc.} \right\}$$

wo z und C_1, C_2 , etc. dieselben Ausdrücke haben wie vorher, aber

$$\mu = n + \frac{1}{2}$$

ist. Die ersten Glieder dieser Ausdrücke werden der Gleichung (25) analog,

$$(25^*) \quad V_0^{(-n)} = \frac{c}{\sqrt{\beta}} \frac{(1+\beta^2)^n (1-\beta)}{(1+\beta)^{2n}} + \frac{c^1}{\sqrt{\beta}} \frac{(1+\beta^2)^n (1+\beta)}{(1-\beta)^{2n}}$$

Es ist nun auch

$$V_0^{(-n)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varrho^{-n} df$$

und

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1+\beta^2}{(1-\beta^2)^2} (1+2\beta \cos f + \beta^2)$$

also

$$V_0^{(-n)} = \frac{(1+\beta^2)^n}{\pi(1-\beta^2)^{2n}} \int_0^\pi (1+2\beta \cos f + \beta^2)^n df$$

Setzt man hier

$$1+2\beta \cos f + \beta^2 = (1+\beta)^2 c - \frac{v^2}{\mu}$$

so durchläuft v das Intervall von

$$v = 0, \text{ bis } v = p = \sqrt{2\mu \log \frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

während f das Intervall von $f = 0$ bis $f = \pi$ durchläuft. Man bekommt daher auf dieselbe Art wie oben

$$V_0^{(-n)} = \frac{(1+\beta^2)^n (1+\beta)}{\pi(1-\beta)^{2n} \sqrt{\mu\beta}} \int_0^p dv c^{-v^2} \left\{ 1 - \frac{1+\beta^2}{4\beta} \frac{v^2}{\mu} + \frac{1}{6} \frac{v^4}{\mu^2} + \text{etc.} \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

Wendet man bei der Integration dieses Ausdrucks dieselben Schlüsse an wie oben, so werden die ersten Glieder

$$V_0^{(-n)} = \frac{(1+\beta^2)^n (1+\beta)}{2(1-\beta)^{2n} \sqrt{\beta} \cdot \sqrt{\mu\pi}} \left\{ 1 - \frac{7}{256\mu^2} + \frac{1617}{262144\mu^4} + \text{etc.} \right\}$$

und die Vergleichung dieses Ausdrucks mit (25*) giebt

$$c = 0$$

$$c^1 = \frac{1}{2\sqrt{\mu\pi}} \left\{ 1 - \frac{7}{256\mu^2} + \frac{1617}{262144\mu^4} + \text{etc.} \right\}$$

und man bekommt schliesslich

$$V_0^{(-n)} = \frac{k^1}{2\sqrt{\mu\pi} \cdot \cos n\varphi} \operatorname{tg}^\mu (45^\circ + \frac{1}{2}\varphi) \left\{ z + \frac{C_1}{\mu} + \frac{C_2}{\mu^2} + \text{etc.} \right\}$$

wo

$$k^1 = 1 - \frac{7}{256\mu^2} + \frac{1617}{262144\mu^4} + \text{etc.}$$

ist. Es ist zu bemerken, dass dieser Ausdruck aus dem obigen für positive Werthe hervorgeht, wenn man darin λ in μ und $\cos \varphi$ in $\sec \varphi$ verwandelt.

§ II.

Entwicklung der Sinusse und Cosinusse der Vielfachen der wahren Anomalie in Reihen, die nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen der excentrischen Anomalie fortschreiten, und umgekehrt.

18.

Ehe ich zu diesen Entwicklungen ins Besondere übergehe, werde ich einige Sätze ableiten, die für solche im Allgemeinen gelten.

Seien f und ε irgend zwei Bögen oder Winkel, zwischen welchen eine solche Relation statt findet, dass die Differenz $f - \varepsilon$ eine periodische Function von f oder ε ist, die in eine convergirende, unendliche, nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen von f oder ε fortschreitende Reihe entwickelt werden kann. Ich nehme überdies an, dass diese Relation reel, d. h. frei von imaginären Grössen sei. Nennt man die zu f und ε gehörigen imaginären Exponentialfunctionen bez. x und y , nemlich

$$x = c^{f\sqrt{-1}}, \quad y = c^{\varepsilon\sqrt{-1}}$$

wo c die Grundzahl der natürlichen Logarithmen ist, so kann man vermöge der angenommenen Relation zwischen f und ε setzen

$$\left(\frac{x}{y}\right)^\mu = \sum_{-\infty}^{+\infty} R_{\mu+h}^{(\mu)} y^h \quad (26)$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^i = \sum_{-\infty}^{+\infty} S_{i+k}^{(i)} x^k \quad (26^*)$$

wo h und k ganze Zahlen, μ und i aber beliebige sind. Die erste dieser Gleichungen giebt durch Multiplication mit y^μ , und wenn man $\mu + h = i$ macht,

$$x^\mu = \sum_{-\infty}^{+\infty} R_i^{(\mu)} y^i \quad (27)$$

und eben so giebt die zweite, wenn man $i + k = \mu$ macht

$$y^i = \sum_{-\infty}^{+\infty} S_\mu^{(i)} x^\mu \quad (28)$$

In diesen beiden Gleichungen sind i und μ beliebige Zahlen, die aber dergestalt von einer abhängig sind, dass die Differenz $i - \mu$ stets eine ganze Zahl ist.

Sei $R_{\mu+h}^{1(\mu)}$ der Werth den $R_{\mu+h}^{(\mu)}$ annimmt, wenn man darin $-\sqrt{-1}$ statt $\sqrt{-1}$ schreibt, dann geht durch diese Substitution die Gleichung (26) in folgende über

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-\mu} = \sum_{-\infty}^{+\infty} R_{\mu+h}^{1(\mu)} y^{-h}$$

Substituirt man nun die Werthe

$$x^\mu = \cos \mu f + \sqrt{-1} \cdot \sin \mu f$$

$$y^i = \cos i\varepsilon + \sqrt{-1} \cdot \sin i\varepsilon$$

in (26) und in die vorstehende Gleichung, und addirt und subtrahirt hierauf diese Gleichungen, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}\cos \mu(f-\varepsilon) &= \frac{1}{2}(R_{\mu}^{(\mu)} + R_{\mu}^{1(\mu)}) + \frac{1}{2}(R_{\mu+1}^{(\mu)} + R_{\mu+1}^{1(\mu)} + R_{\mu-1}^{(\mu)} + R_{\mu-1}^{1(\mu)}) \cos \varepsilon \\ &\quad + \frac{1}{2}(R_{\mu+2}^{(\mu)} + R_{\mu+2}^{1(\mu)} + R_{\mu-2}^{(\mu)} + R_{\mu-2}^{1(\mu)}) \cos 2\varepsilon + \text{etc.} \\ &\quad + \frac{1}{2}(R_{\mu+1}^{(\mu)} - R_{\mu+1}^{1(\mu)} - R_{\mu-1}^{(\mu)} + R_{\mu-1}^{1(\mu)}) \sqrt{-1} \cdot \sin \varepsilon \\ &\quad + \frac{1}{2}(R_{\mu+2}^{(\mu)} - R_{\mu+2}^{1(\mu)} - R_{\mu-2}^{(\mu)} + R_{\mu-2}^{1(\mu)}) \sqrt{-1} \cdot \sin 2\varepsilon + \text{etc.} \\ \sqrt{-1} \cdot \sin \mu(f-\varepsilon) &= \frac{1}{2}(R_{\mu}^{(\mu)} - R_{\mu}^{1(\mu)}) + \frac{1}{2}(R_{\mu+1}^{(\mu)} - R_{\mu+1}^{1(\mu)} + R_{\mu-1}^{(\mu)} - R_{\mu-1}^{1(\mu)}) \cos \varepsilon \\ &\quad + \frac{1}{2}(R_{\mu+1}^{(\mu)} - R_{\mu+1}^{1(\mu)} + R_{\mu-1}^{(\mu)} - R_{\mu-1}^{1(\mu)}) \cos 2\varepsilon + \text{etc.} \\ &\quad + \frac{1}{2}(R_{\mu+1}^{(\mu)} + R_{\mu+1}^{1(\mu)} - R_{\mu-1}^{(\mu)} - R_{\mu-1}^{1(\mu)}) \sqrt{-1} \cdot \sin \varepsilon \\ &\quad + \frac{1}{2}(R_{\mu+2}^{(\mu)} + R_{\mu+2}^{1(\mu)} - R_{\mu-2}^{(\mu)} - R_{\mu-2}^{1(\mu)}) \sqrt{-1} \cdot \sin 2\varepsilon + \text{etc.}\end{aligned}$$

Da angenommen wurde, dass die Relation zwischen f und ε reel ist, so folgt aus den vorstehenden Ausdrücken, dass nothwendig

$$(29) \quad \begin{cases} R_{\mu+h}^{(\mu)} = A_{\mu+h}^{(\mu)} + B_{\mu+h}^{(\mu)} \sqrt{-1} \\ R_{\mu+h}^{1(\mu)} = A_{\mu+h}^{(\mu)} - B_{\mu+h}^{(\mu)} \sqrt{-1} \end{cases}$$

sein muss, wo $A_{\mu+h}^{(\mu)}$ und $B_{\mu+h}^{(\mu)}$ reelle Grössen sind. Es ist an sich klar, dass die Form der S Coefficienten die nemliche sein muss.

Substituirt man die Ausdrücke (29) in die für $\cos \mu(f-\varepsilon)$ und $\sqrt{-1} \sin \mu(f-\varepsilon)$, so bekommt man

$$\begin{aligned}\cos \mu(f-\varepsilon) &= A_{\mu}^{(\mu)} + \{A_{\mu+1}^{(\mu)} + A_{\mu-1}^{(\mu)}\} \cos \varepsilon + \{A_{\mu+2}^{(\mu)} + A_{\mu-2}^{(\mu)}\} \cos 2\varepsilon + \text{etc.} \\ &\quad - \{B_{\mu+1}^{(\mu)} - B_{\mu-1}^{(\mu)}\} \sin \varepsilon - \{B_{\mu+2}^{(\mu)} - B_{\mu-2}^{(\mu)}\} \sin 2\varepsilon - \text{etc.} \\ \sin \mu(f-\varepsilon) &= B_{\mu}^{(\mu)} + \{B_{\mu+1}^{(\mu)} + B_{\mu-1}^{(\mu)}\} \cos \varepsilon + \{B_{\mu+2}^{(\mu)} + B_{\mu-2}^{(\mu)}\} \cos 2\varepsilon + \text{etc.} \\ &\quad + \{A_{\mu+1}^{(\mu)} - A_{\mu-1}^{(\mu)}\} \sin \varepsilon + \{A_{\mu+2}^{(\mu)} - A_{\mu-2}^{(\mu)}\} \sin 2\varepsilon + \text{etc.}\end{aligned}$$

Durch Multiplication mit $\cos \mu\varepsilon$ und $\sin \mu\varepsilon$, und durch Addition und Subtraction ergeben sich hieraus die Ausdrücke von $\cos \mu f$ und $\sin \mu f$, und ähnliche Ausdrücke bekommt man für $\cos i\varepsilon$ und $\sin i\varepsilon$ durch die Cosinusse und Sinusse von μf .

Wenn die zwischen f und ε statt findende Relation so beschaffen ist, dass in der Reihe für $f-\varepsilon$ nur die Sinusse der Vielfachen von f oder ε vorkommen, dann muss nothwendig

$$B_{\mu+h}^{(\mu)} = 0$$

sein, und es wird daher

$$R_{\mu+h}^{(\mu)} = A_{\mu+h}^{(\mu)}$$

Die obigen Ausdrücke gehen in diesem Falle über in

$$\cos \mu (f - \varepsilon) = R_{\mu}^{(\mu)} + \{R_{\mu+1}^{(\mu)} + R_{\mu-1}^{(\mu)}\} \cos \varepsilon + \{R_{\mu+2}^{(\mu)} + R_{\mu-2}^{(\mu)}\} \cos 2\varepsilon + \text{etc.}$$

$$\sin \mu (f - \varepsilon) = \{R_{\mu+1}^{(\mu)} - R_{\mu-1}^{(\mu)}\} \sin \varepsilon + \{R_{\mu+2}^{(\mu)} - R_{\mu-2}^{(\mu)}\} \sin 2\varepsilon + \text{etc.}$$

und ebenso bekommt man

$$\cos i (\varepsilon - f) = S_{\mu}^{(i)} + \{S_{\mu+1}^{(i)} + S_{\mu-1}^{(i)}\} \cos f + \{S_{\mu+2}^{(i)} + S_{\mu-2}^{(i)}\} \cos 2f + \text{etc.}$$

$$\sin i (\varepsilon - f) = \{S_{\mu+1}^{(i)} - S_{\mu-1}^{(i)}\} \sin f + \{S_{\mu+2}^{(i)} - S_{\mu-2}^{(i)}\} \sin 2f + \text{etc.}$$

Wenn μ und i ganze Zahlen sind, so bekommt man hieraus

$$\cos \mu f = R_0^{(\mu)} + \{R_1^{(\mu)} + R_{-1}^{(\mu)}\} \cos \varepsilon + \{R_2^{(\mu)} + R_{-2}^{(\mu)}\} \cos 2\varepsilon + \text{etc.}$$

$$\sin \mu f = \{R_1^{(\mu)} - R_{-1}^{(\mu)}\} \sin \varepsilon + \{R_2^{(\mu)} - R_{-2}^{(\mu)}\} \sin 2\varepsilon + \text{etc.}$$

$$\cos i \varepsilon = S_0^{(i)} + \{S_1^{(i)} + S_{-1}^{(i)}\} \cos f + \{S_2^{(i)} + S_{-2}^{(i)}\} \cos 2f + \text{etc.}$$

$$\sin i \varepsilon = \{S_1^{(i)} - S_{-1}^{(i)}\} \sin f + \{S_2^{(i)} - S_{-2}^{(i)}\} \sin 2f + \text{etc.}$$

19.

Multiplicirt man die beiden Gleichungen

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\mu} = \sum_{-\infty}^{+\infty} R_{\mu+h}^{(\mu)} y^h$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{\mu} = \sum_{-\infty}^{+\infty} R_{\mu+h}^{1(\mu)} y^{-h}$$

Seite für Seite mit einander, so wird im Product die linke Seite gleich Eins, und die rechte Seite giebt folgende Bedingungsgleichungen

$$1 = R_{\mu}^{(\mu)} R_{\mu}^{1(\mu)} + R_{\mu+1}^{(\mu)} R_{\mu+1}^{1(\mu)} + R_{\mu+2}^{(\mu)} R_{\mu+2}^{1(\mu)} + \text{etc.}$$

$$+ R_{\mu-1}^{(\mu)} R_{\mu-1}^{1(\mu)} + R_{\mu-2}^{(\mu)} R_{\mu-2}^{1(\mu)} + \text{etc.}$$

$$0 = R_{\mu}^{(\mu)} R_{\mu-1}^{1(\mu)} + R_{\mu+1}^{(\mu)} R_{\mu}^{1(\mu)} + R_{\mu+2}^{(\mu)} R_{\mu+1}^{1(\mu)} + \text{etc.}$$

$$+ R_{\mu-1}^{(\mu)} R_{\mu-2}^{1(\mu)} + R_{\mu-2}^{(\mu)} R_{\mu-3}^{1(\mu)} + \text{etc.}$$

$$0 = \text{etc.}$$

Substituirt man die Ausdrücke (29) in die erste dieser, so ergibt sich

$$1 = (A_{\mu}^{(\mu)})^2 + (A_{\mu+1}^{(\mu)})^2 + (A_{\mu+2}^{(\mu)})^2 + \text{etc.}$$

$$+ (A_{\mu-1}^{(\mu)})^2 + (A_{\mu-2}^{(\mu)})^2 + \text{etc.}$$

$$+ (B_{\mu}^{(\mu)})^2 + (B_{\mu+1}^{(\mu)})^2 + (B_{\mu+2}^{(\mu)})^2 + \text{etc.}$$

$$+ (B_{\mu-1}^{(\mu)})^2 + (B_{\mu-2}^{(\mu)})^2 + \text{etc.}$$

welche zu erkennen giebt, dass jeder der A und B Coefficienten kleiner als Eins ist, wenn nicht alle bis auf Einen gleich Null sind, in welchem Falle dieser gleich Eins wird. Es zeigt sich ferner, dass in dem Falle, wo alle B Coefficienten gleich Null sind, die genannte Eigenschaft sich

unmittelbar auf die R Coefficienten bezieht. Durch die Substitution der Ausdrücke (29) in die zweite vorstehende Gleichung zerfällt diese in zwei, wovon die folgende die eine ist,

$$\begin{aligned} 0 = & A_{\mu}^{(\mu)} A_{\mu-1}^{(\mu)} + A_{\mu+1}^{(\mu)} A_{\mu}^{(\mu)} + A_{\mu+2}^{(\mu)} A_{\mu+1}^{(\mu)} + \text{etc.} \\ & + A_{\mu-1}^{(\mu)} A_{\mu-2}^{(\mu)} + A_{\mu-2}^{(\mu)} A_{\mu-3}^{(\mu)} + A_{\mu-3}^{(\mu)} A_{\mu-4}^{(\mu)} + \text{etc.} \\ & + B_{\mu}^{(\mu)} B_{\mu-1}^{(\mu)} + B_{\mu+1}^{(\mu)} B_{\mu}^{(\mu)} + B_{\mu+2}^{(\mu)} B_{\mu+1}^{(\mu)} + \text{etc.} \\ & + B_{\mu-1}^{(\mu)} B_{\mu-2}^{(\mu)} + B_{\mu-2}^{(\mu)} B_{\mu-3}^{(\mu)} + B_{\mu-3}^{(\mu)} B_{\mu-4}^{(\mu)} + \text{etc.} \end{aligned}$$

Diese Gleichung zeigt, dass in keiner Entwicklung der Gattung, die wir hier untersuchen, lauter positive, oder lauter negative Coefficienten vorkommen können, sondern dass stets positive und negative Coefficienten vorhanden sein müssen, den Fall ausgenommen, wo alle Coefficienten bis auf Einen derselben verschwinden.

20.

Multiplicirt man die Gleichung (26) mit $y^{-h} d\varepsilon$ und integrirt sie von $-\pi$ bis $+\pi$, so wird, weil h eine ganze Zahl ist,

$$R_{\mu+h}^{(\mu)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{x}{y}\right)^{\mu} y^{-h} d\varepsilon$$

aber die Gleichung $y = c^{\varepsilon\sqrt{-1}}$ giebt $dy = y\sqrt{-1} d\varepsilon$, also

$$R_{\mu+h}^{(\mu)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c^{-\pi\sqrt{-1}}}^{c^{+\pi\sqrt{-1}}} x^{\mu} y^{-\mu-h-1} dy$$

und eben so giebt die Gleichung (26*)

$$S_{i+k}^{(i)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c^{-\pi\sqrt{-1}}}^{c^{+\pi\sqrt{-1}}} y^i x^{-i-k-1} dx$$

welche Geltung haben, wie auch die Zahlen μ und i beschaffen sind.

Seien jetzt μ und i ganze Zahlen, und

$$\mu + h = i, \quad i + k = \mu$$

dann gehen die vorstehenden Gleichungen in folgende über

$$R_i^{(\mu)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c^{-\pi\sqrt{-1}}}^{c^{+\pi\sqrt{-1}}} x^{\mu} y^{-i-1} dy$$

$$S_{\mu}^{(i)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c^{-\pi\sqrt{-1}}}^{c^{+\pi\sqrt{-1}}} y^i x^{-\mu-1} dx$$

und durch die partielle Integration geht die zweite dieser über in

$$S_{\mu}^{(i)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{i}{\mu} \int_{c^{-\pi\sqrt{-1}}}^{c^{+\pi\sqrt{-1}}} y^{i-1} x^{-\mu} dy$$

Vergleicht man diese mit der ersten, so erhält man die Relation

$$\mu S_{\mu}^{(i)} = i R_{-i}^{(-\mu)}$$

in welcher aber μ und i gleich Null eine Ausnahme bilden.

Wenn man also für alle Werthe von μ die R Coefficienten berechnet hat, so bekommt man durch diese Relation, mit Vorbehalt der angeführten Ausnahme, alle S Coefficienten, d. h. die Coefficienten der entgegengesetzten Entwicklung, und umgekehrt.

21.

Von nun an soll f die wahre und ε die excentrische Anomalie, so wie x und y bez. die diesen Anomalien zugehörigen imaginären Exponentialfunctionen bedeuten; es haben bekanntlich diese beiden Winkel die Relation zu einander, die oben allgemein zwischen f und ε vorausgesetzt wurde. Aus der bekannten Relation zwischen f und ε zieht man leicht

$$x = y \frac{1 - \frac{\beta}{y}}{1 - \beta y} \quad (30)$$

wo, wie vorher, $\beta = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi$ ist. Für irgend einen Werth des Exponenten μ ist also

$$x^{\mu} = y^{\mu} (1 - \beta y)^{-\mu} \left(1 - \frac{\beta}{y}\right)^{\mu}$$

Da nun

$$(1 - \beta y)^{-\mu} = 1 + \frac{\mu}{1} \beta y + \frac{\mu \cdot \mu + 1}{1 \cdot 2} \beta^2 y^2 + \frac{\mu \cdot \mu + 1 \cdot \mu + 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \beta^3 y^3 + \text{etc.}$$

$$\left(1 - \frac{\beta}{y}\right)^{\mu} = 1 - \frac{\mu}{1} \frac{\beta}{y} + \frac{\mu \cdot \mu - 1}{1 \cdot 2} \frac{\beta^2}{y^2} - \frac{\mu \cdot \mu - 1 \cdot \mu - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{\beta^3}{y^3} \pm \text{etc.}$$

so ergiebt sich, wenn man

$$x^{\mu} = \sum R_i^{(\mu)} y^i \quad (31)$$

setzt,

$$R_{\mu}^{(\mu)} = 1 - \frac{\mu^2}{1^2} \beta^2 + \frac{\mu^2 \cdot \mu^2 - 1}{1^2 \cdot 2^2} \beta^4 - \frac{\mu^2 \cdot \mu^2 - 1 \cdot \mu^2 - 4}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} \beta^6 \pm \text{etc.}$$

$$R_{\mu+1}^{(\mu)} = \frac{\mu}{1} \beta - \frac{\mu^2 \cdot \mu + 1}{1^2 \cdot 2} \beta^3 + \frac{\mu^2 \cdot \mu^2 - 1 \cdot \mu + 2}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3} \beta^5 \mp \text{etc.}$$

$$R_{\mu+2}^{(\mu)} = \frac{\mu \cdot \mu + 1}{1 \cdot 2} \beta^2 - \frac{\mu^2 \cdot \mu + 1 \cdot \mu + 2}{1^2 \cdot 2 \cdot 3} \beta^4 + \frac{\mu^2 \cdot \mu^2 - 1 \cdot \mu + 2 \cdot \mu + 3}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 4} \beta^6 \mp \text{etc.}$$

etc.

$$R_{\mu-1}^{(\mu)} = -\frac{\mu}{1} \beta + \frac{\mu^2 \cdot \mu - 1}{1^2 \cdot 2} \beta^2 - \frac{\mu^2 \cdot \mu^2 - 1 \cdot \mu - 2}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3} \beta^5 \pm \text{etc.}$$

$$R_{\mu-2}^{(\mu)} = \frac{\mu \cdot \mu - 1}{1 \cdot 2} \beta^2 - \frac{\mu^2 \cdot \mu - 1 \cdot \mu - 2}{1^2 \cdot 2 \cdot 3} \beta^4 + \frac{\mu^2 \cdot \mu^2 - 1 \cdot \mu - 2 \cdot \mu - 3}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 4} \beta^6 \mp \text{etc.}$$

etc.

Der imaginäre Theil, den im Allgemeinen die R Coefficienten zufolge des Vorhergehenden haben, ist in diesem Falle gleich Null, und es ist daher

jeder R Coefficient kleiner wie Eins, ausgenommen für $\mu = 0$, wo sie alle ausser $R_0^{(0)}$ gleich Null werden, und $R_0^{(0)} = 1$ ist. Dem zweiten Satze des Art. 49 gemäss sind hier negative und positive R Coefficienten vorhanden.

22.

Wenn μ keine ganze Zahl ist, so besteht jeder R Coefficient aus einer unendlichen Zahl von Gliedern und die Anzahl dieser Coefficienten ist zu beiden Seiten von $R_\mu^{(\mu)}$ ausgehend unendlich gross. Wenn hingegen μ eine ganze Zahl ist, so zeigen die Ausdrücke des vor. Art., dass alle R Coefficienten aus einer endlichen Anzahl von Gliedern bestehen, und dass die Anzahl dieser Coefficienten zur einen Seite von $R_\mu^{(\mu)}$ ausgehend endlich ist.

Sei μ eine ganze und positive Zahl, da die Fälle, wo μ ganz und negativ ist, hieraus von selbst folgen, dann zeigen die Ausdrücke der R Coefficienten des vor. Art., dass die $R_{\mu-k}^{(\mu)}$ bei $R_0^{(\mu)}$ abbrechen so, dass in keinem derselben der untere Index negativ werden kann. Die zu Ende des Art. 18 aufgestellten allgemeinen Reihen werden daher in unserm Falle

$$\cos \mu f = R_0^{(\mu)} + R_1^{(\mu)} \cos \varepsilon + R_2^{(\mu)} \cos 2\varepsilon + R_3^{(\mu)} \cos 3\varepsilon + \text{etc.}$$

$$\sin \mu f = R_1^{(\mu)} \sin \varepsilon + R_2^{(\mu)} \sin 2\varepsilon + R_3^{(\mu)} \sin 3\varepsilon + \text{etc.}$$

woraus hervorgeht, dass die Entwicklung von $\sin \mu f$ dieselben Coefficienten hat wie die von $\cos \mu f$.

23.

Löst man die Gleichung (30) in Bezug auf y auf, so kommt

$$y = x \frac{1 + \frac{\beta}{x}}{1 + \beta x}$$

Dieselbe Gleichung geht aus (30) hervor, wenn man darin x und y mit einander vertauscht, und $-\beta$ statt β schreibt. Setzt man daher

$$y^\mu = \sum S_{\mu+k}^{(\mu)} x^{\mu+k}$$

so wird

$$(32) \quad S_{\mu+k}^{(\mu)} = (-1)^k R_{\mu+k}^{(\mu)}$$

es mag k positiv oder negativ sein. Die Gleichungen des Art. 18 geben demzufolge

$$\cos \mu \varepsilon = \pm R_0^{(\mu)} \mp R_1^{(\mu)} \cos f \pm R_2^{(\mu)} \cos 2f \mp R_3^{(\mu)} \cos 3f \pm \text{etc.}$$

$$\sin \mu \varepsilon = \mp R_1^{(\mu)} \sin f \pm R_2^{(\mu)} \cos 2f \mp R_3^{(\mu)} \sin 3f \pm \text{etc.}$$

wo die oberen Zeichen für ein grades, und die unteren für ein ungrades μ gelten.

Also auch in den Entwicklungen von $\cos \mu \varepsilon$ und $\sin \mu \varepsilon$ sind die Coefficienten dieselben wie in den Entwicklungen von $\cos \mu f$ und $\sin \mu f$, nur haben sie abwechselnd das entgegengesetzte Zeichen.

24.

Aus der Gleichung (32) folgt

$$S_{\mu}^{(i)} = (-1)^{\mu-i} R_{\mu}^{(i)}$$

da aber hier augenscheinlich

$$R_{-i}^{(-\mu)} = R_i^{(\mu)}$$

ist, so giebt der Satz des Art. 20,

$$i R_i^{(\mu)} = \mu S_{\mu}^{(i)}$$

in unserm Falle wird also

$$R_{\mu}^{(i)} = (-1)^{\mu-i} \frac{i}{\mu} R_i^{(\mu)} \quad (33)$$

Diese Gleichung ist eine specielle Relation zwischen den R Coefficienten, und ist von grossem Nutzen, wenn man für $\mu = 1$, $\mu = 2$, $\mu = 3$, etc. diese Coefficienten zu berechnen hat. Denn nachdem man durch irgend eins der weiter unten anzugebenden Verfahren diese für die Fälle berechnet hat, wo der untere Index dem oberen gleich, oder grösser ist, so giebt die obige, einfache Gleichung alle Coefficienten, in welchen der untere Index kleiner ist, wie der obere. Hievon ist jedoch, wie schon oben angemerkt wurde, der Werth $\mu = 0$ ausgeschlossen, weil die Gleichung für diesen Fall nicht gilt.

25.

Um andere Gleichungen zwischen den R Coefficienten zu erhalten, bemerke ich zuerst, dass man durch Hülfe der Gleichung

$$x^{\mu} = \left(\frac{y-\beta}{1-\beta y} \right)^{\mu}$$

unmittelbar eine Gleichung zwischen vier R Coefficienten ableiten könnte, die ich jedoch weglasse, weil sich zweckmässigere finden lassen. Das Differential der vorstehenden Gleichung giebt

$$(y - \beta) \frac{d \cdot x^{\mu}}{dy} = \mu x^{\mu} \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta y}$$

und die Gleichung selbst

$$1 + \beta x = \frac{x + \beta}{y} = \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta y}$$

hieraus folgen die beiden Gleichungen

$$(y - \beta) \frac{d \cdot x^\mu}{dy} = \mu x^\mu (1 + \beta x)$$

$$(y - \beta) \frac{d \cdot x^\mu}{dy} = \mu \frac{x^\mu}{y} (x + \beta)$$

Substituirt man hierin die Gleichungen

$$x^\mu = \sum R_i^{(\mu)} y^i; \quad \frac{d \cdot x^\mu}{dy} = \sum i R_i^{(\mu)} y^{i-1}$$

so bekommt man

$$(34) \quad \begin{cases} \mu \beta R_i^{(\mu+1)} = (i - \mu) R_i^{(\mu)} - \beta (i + 1) R_{i+1}^{(\mu)} \\ R_{i+1}^{(\mu+1)} = \frac{i}{\mu} R_i^{(\mu)} - \frac{\mu + i + 1}{\mu} \beta R_{i+1}^{(\mu)} \end{cases}$$

die den Uebergang von den R Coefficienten der Potenz μ zu denen der Potenz $\mu + 1$ zeigen, von welchen jedoch nur die zweite stets diese aus jenen mit der erforderlichen Sicherheit giebt.

Wenn man die R Coefficienten für die Werthe $\mu = 1$, $\mu = 2$, $\mu = 3$, etc. zu berechnen hat, so kann man auf folgende Art mit Leichtigkeit und Sicherheit verfahren. Die Gleichung (30) giebt, wenn man den Nenner derselben in eine unendliche Reihe auflöst,

$$x = (y - \beta)(1 + \beta y + \beta^2 y^2 + \beta^3 y^3 + \text{etc.})$$

Hieraus, so wie aus den allgemeinen Ausdrücken des Art. 21 für die R Coefficienten folgen,

$$R_0^{(1)} = -\beta; \quad R_1^{(1)} = 1 - \beta^2; \quad R_2^{(1)} = \beta(1 - \beta^2); \quad R_3^{(1)} = \beta^2(1 - \beta^2); \text{ etc.}$$

die zur Berechnung der Coefficienten für $\mu = 1$ dienen. Nachdem man diese berechnet hat, bediene man sich der zweiten Gleichung (34) zur Berechnung derjenigen Coefficienten für $\mu = 2$, $\mu = 3$, etc., in welchen der untere Index nicht kleiner ist wie der obere, und der Gleichung (33) für die übrigen, mit Ausnahme von $i = 0$, für welche diese nicht gilt. Setzt man aber $i = -1$ in die zweite (34), so wird wegen $R_{-1}^{(\mu)} = 0$,

$$(35) \quad R_0^{(\mu)} = -\beta R_0^{(\mu-1)}$$

und diese dient endlich zur Berechnung der $R_0^{(\mu)}$.

Da

$$R_{-i}^{(-\mu)} = R_i^{(\mu)}$$

ist, so führt die Entwicklung von $x^{-\mu}$ auf dieselben Coefficienten wie die von $x^{+\mu}$, nur enthält jene blos die negativen Potenzen von y . Mit andern Worten aus

$$x^\mu = R_0^{(\mu)} + R_1^{(\mu)} y + R_2^{(\mu)} y^2 + \text{etc.}$$

erhält man sogleich

$$x^{-\mu} = R_0^{(\mu)} + R_1^{(\mu)} \frac{1}{y} + R_2^{(\mu)} \frac{1}{y^2} + \text{etc.}$$

und ebenso verhält es sich mit der entgegengesetzten Entwicklung.

26.

Wenn man nur für einzelne Werthe von μ oder für andere wie ganze Werthe die R Coefficienten zu berechnen hat, oder wenn man die nach den Regeln des vor. Art. ausgeführte Rechnung einer Controlle unterwerfen will, so kann man sich des folgenden Verfahrens bedienen, welches auf ähnliche Art wie im vor. § die Verhältnisse dieser Coefficienten durch Kettenbrüche giebt.

Setzt man $i+1$ statt i in die erste Gleichung (34), und eliminirt dann zwischen dieser und der zweiten (34) den Coefficienten $R_{i+1}^{(\mu+1)}$, so kommt

$$\beta i R_i^{(\mu)} - [i+1 - \mu + (i+1+\mu)\beta^2] R_{i+1}^{(\mu)} + \beta(i+2) R_{i+2}^{(\mu)} = 0 \quad (36)$$

welches eine Gleichung zwischen je drei auf einander folgenden, einem und demselben Werthe von μ zugehörigen R Coefficienten ist.

Sei nun für positive Werthe von i

$$\frac{R_{\mu+i}^{(\mu)}}{R_{\mu+i-1}^{(\mu)}} = p_i$$

$$p_i = F_i \gamma_i$$

$$F_i = \frac{(i+\mu-1)\beta}{i+(i+2\mu)\beta^2} = \frac{i+\mu-1}{2(i+2\mu \sin^2 \frac{1}{2}\varphi)} \sin \varphi$$

dann geht die Gleichung (36), nachdem darin $\mu+i$ statt i gesetzt worden ist, über in

$$0 = 1 - \gamma_i + \gamma_i \gamma_{i+1} \lambda_{i+1} \quad (37)$$

$$\text{wo } \lambda_i = \frac{(i+\mu)(i+\mu-1)\beta^2}{[i+(i+2\mu)\beta^2][i-1+(i+1+2\mu)\beta^2]} = F_i \frac{i+\mu}{i-1+2\mu \sin^2 \frac{1}{2}\varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{2} \quad (38)$$

und es entstehen, gleichwie im vor. §, die Kettenbrüche

$$\gamma_{i-1} = \frac{1}{1-\lambda_i} \quad \gamma_{i-2} = \frac{1}{1-\frac{\lambda_{i-1}}{1-\lambda_i}} \quad \text{etc.}$$

wovon stets der folgende aus dem vorhergehenden durch Hinzufügung Eines Gliedes entsteht.

Hat man hieraus die γ_i und daraus wieder durch die Gleichung

$$p_i = F_i \gamma_i$$

die p_i berechnet, so wird schliesslich

$$R_{\mu+i}^{(\mu)} = R_{\mu}^{(\mu)} p_1 p_2 p_3 \dots p_i$$

Um die Grenze zu finden, nach welcher die γ_i hinstreben, verfare ich wieder wie oben. Es wird

$$\lambda_\infty = \frac{1}{4} \sin^2 \varphi$$

$$0 = 4 - 4\gamma_\infty + \sin^2 \varphi \cdot \gamma_\infty^2$$

woraus

$$\gamma_\infty = \sec^2 \frac{1}{2} \varphi$$

hervorgeht. Es hat also γ hier denselben Grenzwert wie oben bei der Entwicklung der positiven Potenzen des Radius Vectors.

27.

Um die Verhältnisse der R Coefficienten, in welchen der untere Index kleiner ist wie der obere, durch Kettenbrüche auszudrücken, bemerke ich, dass aus den Ausdrücken dieser Coefficienten im Art. 24 hervorgeht, dass man diese aus jenen erhält, wenn man in den Ausdrücken der letzteren $-\mu$ statt μ schreibt. Man braucht daher nur dieselbe Veränderung mit den Ausdrücken des vor. Art. vorzunehmen, um die verlangten Kettenbrüche zu erhalten. Sei zur Unterscheidung

$$\frac{R_{\mu-1}^{(\mu)}}{R_{\mu-i+1}^{(\mu)}} = q_i$$

$$G_i = \frac{\mu+1-i}{2(i-2\mu \sin^2 \frac{1}{2} \varphi)} \sin \varphi$$

$$k_i = G_i \frac{\mu-i}{i-1-2\mu \sin^2 \frac{1}{2} \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{2}$$

dann wird die Relation (36)

$$0 = 1 - \zeta_i + k_{i+1} \zeta_i \zeta_{i+1}$$

und man zieht daraus

$$\zeta_{i-1} = \frac{1}{1-k_i} \cdot \frac{1}{1-k_{i+1}} \cdot \frac{1}{1-\text{etc.}} \quad \text{etc.}$$

$$q_i = -G_i \zeta_i$$

$$R_{\mu-i}^{(\mu)} = R_{\mu}^{(\mu)} q_1 q_2 \dots q_i$$

Der vorstehende Ausdruck für k_i zeigt, dass wenn μ eine ganze Zahl ist,

$$k_\mu = 0 \text{ und } k_{\mu+1} = 0$$

ist, und daher

$$\zeta_{\mu-1} = 1 \text{ und } \zeta_\mu = 1$$

werden. Der Kettenbruch bricht also in diesem Falle bei $k_{\mu-1}$ ab, und es wird

$$\zeta_{\mu-2} = \frac{1}{1-k_{\mu-1}}; \quad \zeta_{\mu-3} = \frac{1}{1-k_{\mu-2} \cdot \zeta_{\mu-2}}; \quad \text{etc.}$$

Der Ausdruck für G_i zeigt, dass

$$G_{\mu+1} = 0$$

ist, und es wird daher

$$R_{-1}^{(\mu)} = R_{-2}^{(\mu)} = \text{etc.} = 0$$

wie oben auf andere Art bewiesen wurde.

28.

Die Anwendung der allgemeinen Formeln des Art. 6 auf den vorliegenden Fall verlangt, um einfache Ausdrücke zu erhalten, eine besondere Zerlegung. Im vorvor. Art. wurde gezeigt, dass die Grenze der γ_i für wachsende i , $\sec^2 \frac{1}{2} \varphi$ ist. Ich setze nun

$$\gamma_i = h_i q_i (1 + \beta^2)$$

wo also für wachsende i das Product $h_i q_i$ nach der Grenze Eins hinstrebt. Substituirt man diesen Werth von γ_i , so wie den Ausdruck (38) für λ_i in (37), so entsteht

$$1 = q_i \left\{ h_i (1 + \beta^2) - \frac{(i+\mu)(i+1+\mu)\beta^2(1+\beta^2)^2 h_i h_{i+1}}{[i+(i+2\mu)\beta^2][i+1+(i+1+2\mu)\beta^2]} q_{i+1} \right\}$$

Den eingeführten Factor h_i werde ich nun benutzen, um den zusammengesetzten Nenner des letzten Gliedes dieser Gleichung fortzuschaffen. Zu diesem Ende brauchte ich nur h_i der Grösse $i+(i+2\mu)\beta^2$ gleich zu setzen, allein wenn ich diesem Ausdruck noch im Nenner die Grösse $i(1+\beta^2)$ hinzufüge, so wird bewirkt, dass für wachsende i der Factor h_i nach der Grenze Eins hinstrebt, und dass nun folglich auch q_i dieselbe Eigenschaft besitzen muss, weil sonst das Product $h_i q_i$ sie nicht besitzen kann. Sei also

$$h_i = \frac{i+(i+2\mu)\beta^2}{i(1+\beta^2)}$$

dann geht die obige Gleichung in folgende über

$$1 = q_i \left\{ 1 + \frac{i+2\mu}{i} \beta^2 - \frac{(i+\mu)(i+1+\mu)}{i(i+1)} \beta^2 q_{i+1} \right\}$$

Vergleicht man diese mit der Gleichung (A) des Art. 6, so findet man

$$a_i = \frac{i+2\mu}{i} \beta^2; \quad b_i = \frac{(i+\mu)(i+1+\mu)}{i(i+1)} \beta^2$$

und hiemit geben die Endformeln des genannten Artikels

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{\mu(\mu-1)}{i(i+1)} \beta^2; & \beta_i &= \frac{(i+\mu)(i+1+\mu)}{(i+1)(i+2)} \beta^2 \\ \gamma_i^1 &= \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{(i+2)(i+3)} \beta^2; & \delta_i &= \frac{(i+1+\mu)(i+2+\mu)}{(i+3)(i+4)} \beta^2 \\ &\text{etc.} & &\text{etc.} \end{aligned}$$

$$\gamma_i = \frac{i + 2\mu \sin^2 \frac{1}{2}\varphi}{i} \cdot \frac{\sec^2 \frac{1}{2}\varphi}{1 - \alpha_i} \cdot \frac{1}{1 - \beta_i} \cdot \frac{1}{1 - \gamma_i} \cdot \frac{1}{1 - \text{etc.}}$$

Wenn μ ganz und positiv ist, können die $\beta_i, \delta_i, \text{etc.}$ nie Null werden, aber von den Grössen $\alpha_i, \gamma_i, \text{etc.}$ wird stets die μ^{te} gleich Null, und der Kettenbruch besteht daher aus $2(\mu - 1)$ Gliedern.

29.

Den analogen Kettenbruch für die $R_{\mu-i}^{(\mu)}$ bekommen wir wieder durch die Substitution von $-\mu$ statt μ in die Formel des vor. Art. Es wird also hier

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{\mu(\mu+1)}{i(i+1)} \beta^2; & \beta_i &= \frac{(\mu-i)(\mu-1-i)}{(i+1)(i+2)} \beta^2 \\ \gamma_i &= \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{(i+2)(i+3)} \beta^2; & \delta_i &= \frac{(\mu-1-i)(\mu-2-i)}{(i+3)(i+4)} \beta^2 \\ &\text{etc.} & &\text{etc.} \end{aligned}$$

$$\zeta_i = \frac{i - 2\mu \sin^2 \frac{1}{2}\varphi}{i} \cdot \frac{\sec^2 \frac{1}{2}\varphi}{1 - \alpha_i} \cdot \frac{1}{1 - \beta_i} \cdot \frac{1}{1 - \text{etc.}}$$

Unter der oben angeführten Bedingung werden hier die Grössen $\alpha_i, \gamma_i, \text{etc.}$ nie Null werden, hingegen von den $\beta_i, \delta_i, \text{etc.}$ stets die $(\mu - i)^{\text{te}}$ und die $(\mu - i + 1)^{\text{te}}$. Der Kettenbruch ist daher endlich und besteht aus $2(\mu - i) \mp 1$ Gliedern.

30.

Für die Anwendung der eben entwickelten Formeln ist noch übrig zu zeigen, wie $R_{\mu}^{(\mu)}$ bequem berechnet werden kann. Man wird zwar immer den im Art. 21 gegebenen endlichen Ausdruck, nemlich

$$R_{\mu}^{(\mu)} = 1 - \frac{\mu^2}{1^2} \beta^2 + \frac{\mu^2 \cdot \mu^2 - 1}{1^2 \cdot 2^2} \beta^4 - \frac{\mu^2 \cdot \mu^2 - 1 \cdot \mu^2 - 4}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} \beta^6 \pm \text{etc.}$$

anwenden können, aber wenn μ eine grosse Zahl, und dabei β nicht klein ist, so wird die Anwendung desselben beschwerlich, weil die einzelnen Glieder sehr gross werden, und sich bei der Summirung fast aufheben, indem stets $R_{\mu}^{(\mu)} < 1$ werden muss, wie oben gezeigt wurde. Die R Coefficienten sind hypergeometrische Reihen derselben Gattung wie die, die uns im vor. § begegneten, nur hängen sie von andern Elementen ab wie jene. Aus den Ausdrücken des Art. 21 findet man leicht, dass

$$R_{\mu+i}^{(\mu)} = B_{\mu,i} \beta^i F(-\mu, \mu+i, i+1, \beta^2)$$

$$R_{\mu-i}^{(\mu)} = (-1)^i B_{-\mu,i} \beta^i F(\mu, -\mu+i, i+1, \beta^2)$$

wo $B_{\mu,i} = \frac{\mu \cdot \mu+1 \dots \mu+i-1}{1 \cdot 2 \dots i}, \quad B_{-\mu,i} = \frac{\mu \cdot \mu-1 \dots \mu-i+1}{1 \cdot 2 \dots i}$

und auch diese beiden Ausdrücke lassen sich in Einen zusammen ziehen, wenn man $-\mu$ statt μ schreibt. Man kann nun die obigen Verwandelungsformeln auf diese Functionen anwenden, und ihnen dadurch eine Menge anderer Formen geben, wenn gleich es scheint, dass diese F Functionen wegen der Beschaffenheit ihrer Elemente einer geringeren Anzahl von bequemen Verwandelungen fähig sind, wie jene.

Ich werde hier nur eine Verwandelung anführen, und zwar die, wodurch das vierte Element β^2 d. i. $\sin^2 k$ in $\cos^2 k$ übergeht. Zufolge der dazu dienenden Formel (21) wird nun zwar

$$F(-\mu, \mu+i, i+1, \beta^2) = c F(-\mu, \mu+1, 0, \cos^2 k)$$

und diese Form ist nicht anwendbar, weil die F Function rechter Hand unendlich wird, aber vermöge der ersten Formel (15) bekommt man zuerst

$$F(-\mu, \mu+i, i+1, \beta^2) = \cos^2 k F(i+1+\mu, 1-\mu, i+1, \beta^2)$$

und wenn man die Formel (21) auf die rechte Seite dieser Gleichung anwendet, so ergibt sich

$$F(-\mu, \mu+i, i+1, \beta^2) = c \cos^2 k F(i+1+\mu, 1-\mu, 2, \cos^2 k)$$

wo man nur noch die Constante c zu bestimmen hat, welches hier möglich ist, weil beide F Functionen endliche Ausdrücke sind. Das mit der höchsten Potenz von β oder $\sin k$ in der Function linker Hand multiplicirte Glied ist

$$= (-1)^\mu \frac{\mu+i \cdot \mu+i+1 \dots 2\mu+i-1}{i+1 \cdot i+2 \dots i+\mu} \sin^{2\mu} k$$

und das mit der höchsten Potenz von $\cos k$ rechter Hand multiplicirte Glied

$$= c (-1)^{\mu-1} \frac{\mu+i+1 \cdot \mu+i+2 \dots 2\mu+i-1}{2 \cdot 3 \dots \mu} \cos^{2\mu} k$$

Hieraus folgt

$$c = (-1)^{\mu+1} \frac{2 \cdot 3 \dots \mu}{i+1 \cdot i+2 \dots i+\mu-1}$$

und wenn man diesen Werth substituirt

$$R_{\mu+i}^{(\mu)} = (-1)^{\mu+1} \mu \sin^i k \cos^2 k F(i+1+\mu, 1-\mu, 2, \cos^2 k)$$

welche für alle ganzen und positiven Werthe von μ und i gilt.

Schreibt man $-\mu$ statt μ , so wird

$$F(\mu, -\mu+i, i+1, \beta^2) = c \cos^2 k F(i+1-\mu, 1+\mu, 2, \cos^2 k)$$

und wenn man diese Gleichung eben so behandelt, erhält man

$$R_{\mu-i}^{(\mu)} = (-1)^{\mu+1} \mu \sin^i k \cos^2 k F(i+1-\mu, 1+\mu, 2, \cos^2 k)$$

die auch für alle ganzen und positiven Werthe von μ und i gilt, aber dabei die Erfüllung der Ungleichheit

$$\mu - i > 0$$

verlangt, weshalb der Werth von $R_0^{(\mu)}$ davon ausgeschlossen ist. *) Für $i = 0$ geben diese beiden Ausdrücke

$$R_{\mu}^{(\mu)} = (-1)^{\mu+1} \mu \cos^2 k \left\{ 1 - \frac{\mu^2-1}{1.2} \cos^2 k + \frac{\mu^2-1.\mu^2-4}{1.2.2.3} \cos^4 k - \frac{\mu^2-1.\mu^2-4.\mu^2-9}{1.2.3.2.3.4} \cos^6 k \pm \text{etc.} \right\}$$

34.

Für die Fälle, in welchen die vorstehenden Formeln sich nicht bequem anwenden lassen, dient wieder die halbconvergirende Reihe, die ich jetzt auf ähnliche Weise wie die im vor. § ableiten, und bei welcher ich mich auf $R_{\mu}^{(\mu)}$ beschränken werde. Wenn man die Differentialgleichung (14) auf die F Function anwendet, wodurch $R_{\mu}^{(\mu)}$ dargestellt wird, so findet man, wenn man zur Abkürzung sich erlaubt bloß R zu schreiben, weil hier daraus keine Verwechselung entstehen kann,

$$\frac{d^2 R}{d\beta^2} \beta (1-\beta^2) + \frac{dR}{d\beta} (1-\beta^2) + 4\mu^2 \beta R = 0$$

deren erstes und letztes Glied man von der unabhängigen Veränderlichen befreit, wenn man k durch die Gleichung $\beta = \sin k$ als solche einführt. Es wird somit

$$\frac{d^2 R}{dk^2} + \frac{dR}{dk} \frac{1}{\sin k \cos k} + 4\mu^2 R = 0$$

deren Integral mit Uebergang des zweiten Gliedes

*) Ich führe beiläufig an, dass die Vergleichung der eben gefundenen Ausdrücke von $R_{\mu+i}^{(\mu)}$ und $R_{\mu-i}^{(\mu)}$ mit den ursprünglichen auf merkwürdige Relationen führt, von welchen ich hier die folgenden anführen will. Die Binominalcoefficienten für jede ganze Potenz lassen sich wie folgt ausdrücken:

$$\frac{\mu.\mu+1.\dots.\mu+i-1}{1.2.\dots.i} = (-1)^{\mu+1} \mu \left\{ 1 - \frac{\mu-1.\mu+i+1}{1.2} + \frac{\mu-1.\mu-2.\mu+i+1.\mu+i+2}{1.2.2.3} \mp \text{etc.} \right\}$$

$$(-1)^i \frac{\mu.\mu-1.\dots.\mu-i+1}{1.2.\dots.i} = (-1)^{\mu+1} \mu \left\{ 1 - \frac{\mu+1.\mu-i-1}{1.2} + \frac{\mu+1.\mu+2.\mu-i-1.\mu-i-2}{1.2.2.3} \mp \text{etc.} \right\}$$

Ferner ist für jeden ganzen und positiven Werth von μ, i und $\mu-i$,

$$0 = 1 - \frac{\mu.\mu+i}{1.i+1} + \frac{\mu.\mu-1.\mu+i.\mu+i+1}{1.2.i+1.i+2} \mp \text{etc.}$$

$$0 = 1 - \frac{\mu.\mu-i}{1.i+1} + \frac{\mu.\mu+1.\mu-i.\mu-i-1}{1.2.i+1.i+2} \mp \text{etc.}$$

u. s. w.

$$R = w c^{2i\mu k} + w^1 c^{-2i\mu k} \quad (39)$$

ist, wo w und w^1 die willkürlichen Constanten, und $i = \sqrt{-1}$ ist. Wendet man nun zur vollständigen Integration die im Art. 14 des vor. § erklärte Methode an, so bekommt man zur Bestimmung von w und w^1 die folgenden Gleichungen

$$4i\mu \left(\frac{dw}{dk} + \frac{w}{2 \sin k \cos k} \right) = - \frac{d^2 w}{dk^2} - \frac{dw}{dk} \frac{1}{\sin k \cos k}$$

$$4i\mu \left(\frac{dw^1}{dk} + \frac{w^1}{2 \sin k \cos k} \right) = \frac{d^2 w^1}{dk^2} + \frac{dw^1}{dk} \frac{1}{\sin k \cos k}$$

von welchen, wie a. a. Orte, nur der einen Genüge geleistet zu werden braucht.

32.

Setzt man, um diese Gleichungen zu vereinfachen,

$$x = \sqrt{\cot g k}$$

so geht die erste derselben in folgende über

$$8i\mu \left\{ \frac{dw}{dx} x^2 - w x \right\} = \frac{d^2 w}{dx^2} (x^5 + x) + \frac{dw}{dx} (x^4 - 3)$$

und um dieser Genüge zu leisten, sei

$$w = C_0 + \frac{C_1}{i\mu} + \frac{C_2}{i^2 \mu^2} + \frac{C_3}{i^3 \mu^3} + \text{etc.}$$

Die Substitution dieses Ausdrucks giebt die allgemeine Gleichung

$$8 \left\{ \frac{dC_\nu}{dx} x^2 - C_\nu x \right\} = \frac{d^2 C_{\nu-1}}{dx^2} (x^5 + x) + \frac{dC_{\nu-1}}{dx} (x^4 - 3)$$

mit Ausnahme von

$$\frac{dC_0}{dx} x - C_0 = 0$$

Dieser ist durch $C_0 = x$ Genüge geleistet, und die Substitution dieses Werthes in die rechte Seite der allgemeinen Gleichung giebt

$$\frac{dC_1}{dx} x^2 - C_1 x = \frac{1}{8} x^4 - \frac{3}{8}$$

welcher durch

$$C_1 = \frac{1}{16} x^3 + \frac{3}{16 x}$$

genügt wird. Setzt man diesen Werth in die rechte Seite der allgemeinen Gleichung, so kommt

$$\frac{dC_2}{dx} x^2 - C_2 x = \frac{9}{128} x^6 + \frac{15}{128 x^2}$$

welcher

$$C_2 = \frac{9}{512} x^5 - \frac{15}{512 x^3}$$

genügt, u. s. w. Man erkennt schon hieraus die Form des allgemeinen Ausdrucks für C_i , nemlich

$$C_i = A_{2i+1}^{(i)} x^{2i+1} + A_{2i-3}^{(i)} x^{2i-3} + A_{2i-7}^{(i)} x^{2i-7} + \dots + A_{-(2i-5)}^{(i)} x^{-2i+5} + A_{-(2i-1)}^{(i)} x^{-2i+1}$$

wo die ganze und positive Zahl i von 0 bis ∞ ausgedehnt werden muss,

$$A_1^{(1)} = 1,$$

und für alle übrigen Werthe von i

$$A_1^{(i)} = 0$$

ist. Setzt man diesen Werth von C_i in die obige allgemeine Gleichung, so bekommt man

$$16(i+1) A_{2i+3}^{(i+1)} = (2i+1)^2 A_{2i+1}^{(i)}$$

$$16(i-1) A_{2i-1}^{(i+1)} = (2i-3)^2 A_{2i-3}^{(i)} + (2i+1)(2i-3) A_{2i+1}^{(i)}$$

$$16(i-3) A_{2i-5}^{(i+1)} = (2i-7)^2 A_{2i-7}^{(i)} + (2i-3)(2i-7) A_{2i-3}^{(i)}$$

etc. bis

$$-16(i-1) A_{-(2i-3)}^{(i+1)} = (2i-1)^2 A_{-(2i-1)}^{(i)} + (2i-5)(2i-1) A_{-(2i-5)}^{(i)}$$

$$-16(i+1) A_{-(2i+1)}^{(i+1)} = (2i-1)(2i+3) A_{-(2i-1)}^{(i)}$$

woraus man nach und nach alle A Coefficienten berechnen kann. Man kann diese Gleichungen in eine allgemeine zusammen ziehen, wenn man die ganze und positive Zahl i^1 einführt, die von 0 bis $i+1$ ausgedehnt werden muss, es wird alsdann allgemein

$$16(i-2i^1+1) A_{2i-4i^1+3}^{(i+1)} = (2i-4i^1+1)^2 A_{2i-4i^1+1}^{(i)} + (2i-4i^1+5)(2i-4i^1+1) A_{2i-4i^1+5}^{(i)}$$

Setzt man hierin für jedes ungrade i

$$i^1 = \frac{i+1}{2}$$

so wird

$$A_{-1}^{(i)} = 3A_3^{(i)}$$

die als Controlle benutzt werden kann. Setzt man für jedes grade i nach einander

$$i^1 = \frac{1}{2}i \text{ und } i^1 = \frac{i+2}{2}$$

so kommt wegen $A_1^{(i)} = 0$,

$$A_3^{(i+1)} = \frac{5}{16} A_5^{(i)}; \quad A_{-1}^{(i+1)} = -\frac{9}{16} A_{-3}^{(i)}$$

deren man noch mehrere geben kann.

33.

Geben wir nun den beiden willkürlichen Constanten die imaginäre Form hc^{-il} und hc^{il} , wo $i = \sqrt{-1}$, und multipliciren die Ausdrücke von w und w^1 damit, so wird

$$w = hc^{-il} \left(C_0 + \frac{C_1}{i\mu} + \frac{C_2}{i^2\mu^2} + \frac{C_3}{i^3\mu^3} + \text{etc.} \right)$$

$$w^1 = hc^{il} \left(C_0 - \frac{C_1}{i\mu} + \frac{C_2}{i^2\mu^2} - \frac{C_3}{i^3\mu^3} \pm \text{etc.} \right)$$

Substituirt man diese in (39) und geht zum Reellen über, so kommt

$$R = 2h \cos(2\mu k - l) \left(C_0 - \frac{C_2}{\mu^2} + \frac{C_4}{\mu^4} - \text{etc.} \right) \quad (40)$$

$$+ 2h \sin(2\mu k - l) \left(\frac{C_1}{\mu} - \frac{C_3}{\mu^3} + \frac{C_5}{\mu^5} - \text{etc.} \right)$$

wo noch die beiden willkürlichen Constanten h und l zu bestimmen sind.

Aus den Ausdrücken des vor. Art. habe ich die Werthe der ersten C Coefficienten wie folgt gefunden,

$$C_0 = x$$

$$C_1 = \frac{1}{46} x^3 + \frac{3}{46} x$$

$$C_2 = \frac{9}{512} x^5 - \frac{15}{512} x^3$$

$$C_3 = \frac{75}{8192} x^7 + \frac{45}{8192} x^5 + \frac{135}{8192} x^3 + \frac{405}{8192} x$$

$$C_4 = \frac{3675}{524288} x^9 + \frac{495}{65536} x^7 - \frac{825}{65536} x^5 - \frac{4725}{524288} x^3$$

$$C_5 = \frac{59535}{8388608} x^{11} + \frac{88125}{8388608} x^9 + \frac{2475}{4048576} x^7 + \frac{7425}{4048576} x^5 + \frac{123375}{8388608} x^3 + \frac{72765}{8388608} x$$

$$C_6 = \frac{2401245}{268435456} x^{13} + \frac{556395}{33554432} x^{11} + \frac{2028825}{268435456} x^9 - \frac{3381375}{268435456} x^7$$

$$- \frac{715365}{33554432} x^5 - \frac{2837835}{268435456} x^3$$

$$C_7 = \frac{57972915}{4294967296} x^{15} + \frac{128297925}{4294967296} x^{13} + \frac{133749825}{4294967296} x^{11} + \frac{10444125}{4294967296} x^9$$

$$+ \frac{30432375}{4294967296} x^7 + \frac{117143985}{4294967296} x^5 + \frac{156808575}{4294967296} x^3 + \frac{66891825}{4294967296} x$$

etc.

34.

Die Bestimmung der beiden willkürlichen Constanten werde ich mittelst des Ausdrucks von R d. i. $R_{\mu}^{(\mu)}$ durch bestimmte Integrale, jedoch auf eine andere Art wie im vor. §, ausführen.

Setzt man $i = \mu - 1$, und $\beta = \sin k$ in die Gleichung (36), so wird

$$R_{\mu}^{(\mu)} = \frac{\mu+1}{2\mu \sin k} R_{\mu+1}^{(\mu)} + \frac{\mu-1}{2\mu \sin k} R_{\mu-1}^{(\mu)}$$

oder

$$R_{\mu}^{(\mu)} = \frac{W_{\mu}}{\mu \sin k} - \frac{V_{\mu}}{\sin k} \quad (41)$$

wenn man

$$V_{\mu} = -\frac{1}{2} \left(R_{\mu+1}^{(\mu)} + R_{\mu-1}^{(\mu)} \right)$$

$$W_{\mu} = \frac{1}{2} \left(R_{\mu+1}^{(\mu)} - R_{\mu-1}^{(\mu)} \right) \quad (42)$$

schreibt. Die Reihen des Art. 18 geben aber in Verbindung mit der Gleichung (32)

$$\cos \mu(f - \varepsilon) = R_{\mu}^{(\mu)} + 2V_{\mu} \cos f + \text{etc.}$$

$$\sin \mu(f - \varepsilon) = 2W_{\mu} \sin f + \text{etc.}$$

und man bekommt daher

$$V_{\mu} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \mu(f - \varepsilon) \cos f df$$

$$W_{\mu} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \mu(f - \varepsilon) \sin f df$$

die, wenn sie in (41) substituirt werden, $R_{\mu}^{(\mu)}$ durch bestimmte Integrale ausdrücken. Die Substitution, die im vor. § für die Ermittlung des dort angewandten bestimmten Integrals benutzt wurde, ist hier nicht anwendbar, weil wenigstens für gewisse Werthe von μ und k die Coefficienten von df in den obigen Integralen mehr wie Ein Maximum und Minimum haben. Man kann aber dagegen für den speciellen Werth $k = \frac{\pi}{4}$ die obigen Integrale und ihre ersten Differentialquotienten nach k durch einfache Ausdrücke erhalten, und diese werde ich zur Bestimmung der beiden willkürlichen Constanten h und l anwenden.

35.

Seien wieder x und y bez. die zur wahren und excentrischen Anomalie gehörigen imaginären Exponentialfunctionen, dann wird, weil $\beta = \sin k$ gesetzt worden ist, die Gleichung zwischen x und y

$$x(1 - y \sin k) = y - \sin k \quad (43)$$

Setzt man ferner

$$\theta = \frac{x}{y}$$

dann ist θ die zum Unterschiede der wahren und excentrischen Anomalie gehörige imaginäre Exponentialfunction, oder wenn man

$$f - \varepsilon = \omega$$

macht, so ist

$$\theta = c^{\omega \sqrt{-1}}$$

wenn c die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet. Aus der Gleichung (43) ziehe ich durch die Elimination von y

$$x^2 \sin k - x(\theta - 1) - \theta \sin k = 0$$

woraus

$$2x \sin k = \theta - 1 \pm \sqrt{1 - 2\theta \cos 2k + \theta^2}$$

folgt, welcher Ausdruck auch wie folgt geschrieben werden kann,

$$2x \sin k = \theta - 1 \pm \sqrt{\theta \left(\theta + \frac{1}{\theta} - 2 \cos 2k \right)}$$

Die Verwandlung von $\sqrt{-1}$ in $-\sqrt{-1}$ giebt hieraus sogleich

$$\frac{2 \sin k}{x} = \frac{1}{\theta} - 1 \pm \sqrt{\frac{1}{\theta} \left(\theta + \frac{1}{\theta} - 2 \cos 2k \right)}$$

und hieraus erhält man durch Addition und Subtraction, und durch den Uebergang zum Reellen

$$2 \sin k \cos f = \cos \omega - 1 \pm \cos \frac{1}{2} \omega \sqrt{2 \cos \omega - 2 \cos 2k}$$

$$2 \sin k \sin f = \sin \omega \pm \sin \frac{1}{2} \omega \sqrt{2 \cos \omega - 2 \cos 2k}$$

Untersuchen wir den Gang, den diese Functionen annehmen, während f den ersten Halbkreis durchläuft. Wenn $f = 0$ ist, so ist auch $\omega = 0$, und die Substitution dieser Werthe in die vorstehenden Gleichungen zeigt, dass der ersten derselben nur durch das obere, vor der Wurzelgrösse befindliche, Zeichen Genüge geleistet werden kann. Da nun jedenfalls in beiden Gleichungen zugleich das obere oder untere Zeichen angewandt werden muss, weil sonst nicht der Bedingung $\sin^2 f + \cos^2 f = 1$ Genüge geleistet wird, und ω stets positiv ist, während f und ε im ersten Halbkreise liegen, so muss von $\omega = 0$, welchem $f = 0$ entspricht, ausgehend in beiden Gleichungen das obere Zeichen angewandt, und hiemit fortgefahren werden, bis ω sein Maximum $= 2k$ erreicht. Für dieses Maximum ist die Wurzelgrösse gleich Null, und würde imaginär werden, wenn man ω grössere Werthe beilegen wollte; $\cos f$ ist unterdess negativ geworden. Setzt man nun $f = 180^\circ$, so ist wieder $\omega = 0$, und der ersten Gleichung kann nur durch das untere Zeichen Genüge geleistet werden. Hieraus folgt eben so wie vorher, dass man von $\omega = 0$, welchem $f = 180^\circ = \pi$ entspricht, ausgehend bis $\omega = 2k$, welchem Gange von ω rückwärts gehende Werthe von f entsprechen, in beiden Gleichungen das untere Zeichen anwenden muss. Um also f von 0 bis π wachsen zu lassen, muss man zuerst mit Anwendung der oberen Zeichen ω von 0 bis $2k$ zunehmen, und dann mit Anwendung der unteren Zeichen ω von $2k$ bis 0 abnehmen lassen. Man sieht hieraus leicht, wie der Zeichenwechsel beschaffen ist, wenn f den zweiten Halbkreis durchlaufen müsste.

Setzt man nun zur Abkürzung

$$M = \cos \frac{1}{2} \omega \sqrt{2 \cos \omega - 2 \cos 2k}$$

$$N = \sin \frac{1}{2} \omega \sqrt{2 \cos \omega - 2 \cos 2k}$$

so wird

$$\cos f' = \frac{\cos \omega - 1}{2 \sin k} \pm \frac{M}{2 \sin k}$$

$$\sin f = \frac{\sin \omega}{2 \sin k} \pm \frac{N}{2 \sin k}$$

woraus

$$\sin f df = \frac{\sin \omega}{2 \sin k} d\omega \mp \frac{dM}{d\omega} \frac{d\omega}{2 \sin k}$$

$$\cos f df = \frac{\cos \omega}{2 \sin k} d\omega \pm \frac{dN}{d\omega} \frac{d\omega}{2 \sin k}$$

folgt. Substituirt man diese in die obigen Ausdrücke für V_μ und W_μ , nimmt auf die Grenzen der Integrale, und die eben erklärte Anwendung der doppelten Zeichen Rücksicht, so findet man

$$V_\mu = \frac{1}{2\pi \sin k} \int_0^{2k} \cos \mu\omega \cos \omega d\omega + \frac{1}{2\pi \sin k} \int_{2k}^0 \cos \mu\omega \cos \omega d\omega \\ + \frac{1}{2\pi \sin k} \int_0^{2k} \cos \mu\omega \frac{dN}{d\omega} d\omega - \frac{1}{2\pi \sin k} \int_{2k}^0 \cos \mu\omega \frac{dN}{d\omega} d\omega$$

$$W_\mu = \frac{1}{2\pi \sin k} \int_0^{2k} \sin \mu\omega \sin \omega d\omega + \frac{1}{2\pi \sin k} \int_{2k}^0 \sin \mu\omega \sin \omega d\omega \\ - \frac{1}{2\pi \sin k} \int_0^{2k} \sin \mu\omega \frac{dM}{d\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi \sin k} \int_{2k}^0 \sin \mu\omega \frac{dM}{d\omega} d\omega$$

Aber die beiden Integrale der ersten Zeile eines jeden dieser beiden Ausdrücke heben sich augenscheinlich gegen einander auf, die der zweiten Zeile sind auch einander gleich, aber sie addiren sich. Es wird daher

$$V_\mu = \frac{1}{\pi \sin k} \int_0^{2k} \cos \mu\omega \frac{dN}{d\omega} d\omega; \quad W_\mu = - \frac{1}{\pi \sin k} \int_0^{2k} \sin \mu\omega \frac{dM}{d\omega} d\omega$$

Die Differentiale von M und N , welche hier vorkommen, werden an der oberen Grenze der Integrale unendlich gross, und man darf daher die vorstehenden Ausdrücke nicht anwenden, aber es ist leicht, ihnen eine andere Form zu geben, in welcher alle Elemente, aus welchen sie bestehen, endliche Werthe haben. Durch partielle Integration wird

$$\int \cos \mu\omega \frac{dN}{d\omega} d\omega = N \cos \mu\omega + \mu \int N \sin \mu\omega d\omega$$

$$\int \sin \mu\omega \frac{dM}{d\omega} d\omega = M \sin \mu\omega - \mu \int M \cos \mu\omega d\omega$$

aber an beiden Grenzen $\omega = 0$ und $\omega = 2k$ der obigen Integrale ist

$$N \cos \mu\omega = 0, \quad M \sin \mu\omega = 0$$

es folgt hieraus, dass

$$(44) \quad V_\mu = \frac{\mu}{\pi \sin k} \int_0^{2k} N \sin \mu\omega d\omega; \quad W_\mu = \frac{\mu}{\pi \sin k} \int_0^{2k} M \cos \mu\omega d\omega$$

in welchen kein Element unendlich gross wird.

36.

Gehen wir zu den im vor. Art. angegebenen Ausdrücken für M und N zurück; und setzen

$$P = \sqrt{1 - 2\theta \cos 2k + \theta^2}$$

$$Q = \sqrt{1 - \frac{2 \cos 2k}{\theta} + \frac{4}{\theta^2}}$$

so findet sich leicht, dass

$$M = \frac{1}{2}(P + Q)$$

$$N\sqrt{-1} = \frac{1}{2}(P - Q)$$

ist. Da nun der Modul der imaginären Grösse θ gleich Eins ist, und die Wurzelgrössen P und Q einen positiven Exponenten haben, so kann man diese in unendliche, nach den ganzen und positiven Potenzen von θ und bez. von $\frac{1}{\theta}$ fortschreitende, unendliche Reihen entwickeln, die für jeden Werth, den θ annehmen kann, convergiren. Bezeichnet man die Coefficienten dieser Reihen, die Functionen von k und dem Index i sind, mit E_i , so wird

$$P = 1 + E_1 \theta + E_2 \theta^2 + E_3 \theta^3 + E_4 \theta^4 + \text{etc.}$$

$$Q = 1 + E_1 \frac{1}{\theta} + E_2 \frac{1}{\theta^2} + E_3 \frac{1}{\theta^3} + E_4 \frac{1}{\theta^4} + \text{etc.}$$

woraus sofort

$$M = 1 + E_1 \cos \omega + E_2 \cos 2\omega + E_3 \cos 3\omega + E_4 \cos 4\omega + \text{etc.}$$

$$N = E_1 \sin \omega + E_2 \sin 2\omega + E_3 \sin 3\omega + E_4 \sin 4\omega + \text{etc.}$$

folgt. Diese Reihen sind deshalb merkwürdig, weil sie für M und N stets reelle Werthe geben, während die Ausdrücke, aus denen sie abgeleitet sind, für gewisse Werthe von ω imaginär werden. Die Beantwortung der Frage, was sie für Werthe von M und N geben, wenn darin Werthe von ω substituirt werden, die das Maximum dieser Grösse übersteigen, ist sehr leicht zu finden. Setzt man

$$k = \frac{\pi}{2} - k^1, \quad \omega = \pi - \omega^1$$

und bezeichnet die daraus hervorgehenden Werthe von E_n , M und N bez. mit E_n^1 , M^1 und N^1 , so findet man

$$E_n^1 = (-1)^n E_n, \quad M^1 = M, \quad N^1 = -N$$

diese Reihen geben also in dem genannten Falle bez. die Werthe von

$$\sin \frac{1}{2}\omega \sqrt{2 \cos 2k - 2 \cos \omega} \quad \text{und} \quad -\cos \frac{1}{2}\omega \sqrt{2 \cos 2k - 2 \cos \omega}$$

Nach der Substitution der vorstehenden Reihen in die Ausdrücke (44) haben die Integrationen keine Schwierigkeiten mehr, man findet leicht

$$V_{\mu} = \frac{\mu \sin 2\mu k}{\pi \sin k} \left\{ \frac{E_1}{\mu^2-1} \cos 2k + \frac{2 E_2}{\mu^2-4} \cos 4k + \frac{3 E_3}{\mu^2-9} \cos 6k + \text{etc.} \right\} - \frac{E_{\mu}}{4\pi \sin k} \sin 4\mu k$$

$$- \frac{\mu^2 \cos 2\mu k}{\pi \sin k} \left\{ \frac{E_1}{\mu^2-1} \sin 2k + \frac{E_2}{\mu^2-4} \sin 4k + \frac{E_3}{\mu^2-9} \sin 6k + \text{etc.} \right\} + \frac{\mu k E_{\mu}}{\pi \sin k}$$

$$W_{\mu} = \frac{\mu^2 \sin 2\mu k}{\pi \sin k} \left\{ \frac{1}{\mu^2} + \frac{E_1}{\mu^2-1} \cos 2k + \frac{E_2}{\mu^2-4} \cos 4k + \frac{E_3}{\mu^2-9} \cos 6k + \text{etc.} \right\} + \frac{E_{\mu}}{4\pi \sin k} \sin 4\mu k$$

$$- \frac{\mu \cos 2\mu k}{\pi \sin k} \left\{ \frac{E_1}{\mu^2-1} \sin 2k + \frac{2 E_2}{\mu^2-4} \sin 4k + \frac{3 E_3}{\mu^2-9} \sin 6k + \text{etc.} \right\} + \frac{\mu k E_{\mu}}{\pi \sin k}$$

bei welchen zu bemerken ist, dass die Glieder innerhalb der Klammern, die mit $\mu^2 - \mu^2$ dividirt sind, und also unendlich gross werden, weggelassen werden müssen, und die ausserhalb der Klammern befindlichen Zusatzglieder an ihre Stelle treten.

Dieses gilt jedoch nur, wenn μ eine ganze Zahl ist; wenn dieses nicht der Fall ist, so fallen die von E_{μ} abhängigen, ausserhalb der Klammern stehenden Zusatzglieder weg, und innerhalb der Klammern findet keine Ausnahme statt. Durch Hülfe der Gleichung (41) geben nun die vorstehenden Ausdrücke

$$R_{\mu}^{(\mu)} = \frac{\mu \sin 2\mu k}{\pi \sin^2 k} \left\{ \frac{1}{\mu^2} - \frac{E_2}{\mu^2-4} \cos 4k - \frac{2 E_3}{\mu^2-9} \cos 6k - \frac{3 E_3}{\mu^2-16} \cos 8k - \text{etc.} \right\}$$

$$+ \frac{\cos 2\mu k}{\pi \sin^2 k} \left\{ E_1 \sin 2k + \frac{\mu^2-2}{\mu^2-4} E_2 \sin 4k + \frac{\mu^2-3}{\mu^2-9} \sin 6k + \frac{\mu^2-4}{\mu^2-16} E_4 \sin 8k + \text{etc.} \right\}$$

$$+ \frac{\mu+1}{4\mu} E_{\mu} \frac{\sin 4\mu k}{\pi \sin^2 k} - (\mu-1) \frac{k E_{\mu}}{\pi \sin^2 k}$$

wo dieselbe Bemerkung gilt wie oben.

Durch dieselbe Analyse kann man auch $R_{\mu-1}^{(\mu)}$ und $R_{\mu+1}^{(\mu)}$ ausdrücken; ich werde hier blos diesen Coefficienten geben, weil jener in dieser Abhandlung nicht gebraucht wird. Die Gleichungen (42) geben

$$R_{\mu+1}^{(\mu)} = W_{\mu} - V_{\mu}$$

substituirt man hierin die obigen Ausdrücke für W_{μ} und V_{μ} , so bekommt man sogleich

$$R_{\mu+1}^{(\mu)} = \frac{\mu \sin 2\mu k}{\pi \sin k} \left\{ \frac{1}{\mu} + \frac{E_1}{\mu+1} \cos 2k + \frac{E_2}{\mu+2} \cos 4k + \frac{E_3}{\mu+3} \cos 6k + \text{etc.} \right\}$$

$$+ \frac{\mu \cos 2\mu k}{\pi \sin k} \left\{ \frac{E_1}{\mu+1} \sin 2k + \frac{E_2}{\mu+2} \sin 4k + \frac{E_3}{\mu+3} \sin 6k + \text{etc.} \right\}$$

wo kein Glied eine Ausnahme bildet.

37.

Um aus den vorstehenden Ausdrücken die Summenausdrücke für $R_{\mu}^{(\mu)}$ und $\frac{dR_{\mu}^{(\mu)}}{dk}$ in dem speciellen Falle $k = \frac{\pi}{4}$ zu erhalten, müssen wir erst die Ausdrücke von E_n und $\frac{dE_n}{dk}$ für denselben speciellen Fall kennen lernen. Diese kann man wie folgt erhalten. Sei

$$\psi = \sqrt{1 - 2\alpha z + z^2}, \quad \chi = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha z + z^2}}$$

dann ist

$$\frac{d\psi}{d\alpha} = -z\chi$$

Wenn man nun $\alpha = \cos 2k$ macht, so ist zufolge des Vorhergehenden

$$\psi = 1 + E_1 z + E_2 z^2 + E_3 z^3 + \text{etc.}$$

Setzt man ferner

$$\chi = 1 + U_1 z + U_2 z^2 + U_3 z^3 + \text{etc.}$$

so giebt die obige Gleichung allgemein

$$\frac{dE_n}{d\alpha} = -U_{n-1}$$

Setzt man hierauf $k = \frac{\pi}{4}$, so wird $\alpha = 0$, und

$$\psi = \sqrt{1 + z^2}, \quad \chi = \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}}$$

also durch die Entwicklung

$$\psi = 1 + \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{2 \cdot 4} z^4 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} z^6 - \text{etc.}$$

$$\chi = 1 - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} z^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} z^6 + \text{etc.}$$

Vergleicht man diese Reihen mit den obigen, so erkennt man sogleich, dass wenn i irgend eine ganze und positive Zahl ist, und

$$1) \quad n = 2i$$

$$E_{2i} = (-1)^{i+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2i-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i} \cdot \frac{1}{2^i}, \quad \frac{dE_{2i}}{d\alpha} = 0$$

$$2) \quad n = 2i + 1$$

$$E_{2i+1} = 0; \quad \frac{dE_{2i+1}}{d\alpha} = (-1)^{i+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2i-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i} \cdot \frac{1}{2^i}$$

aber $\alpha = \cos 2k$ giebt $\frac{d\alpha}{dk} = -2$ für $k = \frac{\pi}{4}$, also

$$\frac{dE_{2i+1}}{dk} = (-1)^i \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2i-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i} \cdot \frac{1}{2^{i-1}}$$

38.

Es ist nun leicht die Summenausdrücke von $R_{\mu}^{(\mu)}$ und $\frac{dR_{\mu}^{(\mu)}}{dk}$ für $k = \frac{\pi}{4}$ anzugeben. Setzt man $k = \frac{\pi}{4}$ in dem, im vorvor. Art. abgeleiteten Ausdruck für $R_{\mu}^{(\mu)}$, und

$$1) \mu = 2i$$

dann wird

$$\sin 2\mu k = \sin i\pi = 0$$

$$\cos 2\mu k = \cos i\pi = (-1)^i$$

$$E_1 = E_3 = \text{etc.} = 0$$

woraus

$$R_{2i}^{(2i)} = -\frac{2i-1}{2} E_{2i}$$

hervorgeht. Sei

$$2) \mu = 2i + 1$$

dann wird

$$\sin 2\mu k = \sin \left(i\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^i$$

$$\cos 2\mu k = \cos \left(i\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

und der genannte Ausdruck für $R_{\mu}^{(\mu)}$ giebt

$$R_{2i+1}^{(2i+1)} = (-1)^i \frac{2\mu}{\pi} \left\{ \frac{1}{\mu^2} + \frac{E_2}{\mu^2-4} - \frac{3E_4}{\mu^2-16} + \frac{5E_6}{\mu^2-36} + \text{etc.} \right\}$$

welches jedoch eine schwach convergirende Reihe ist. Man kann aber den Fall, wo μ ungrade ist, auf den wo μ grade ist hinführen, und dadurch zugleich die Summe der vorstehenden Reihe geben. Setzt man $2i$ statt i , und darauf $\mu = 2i$ in die zweite Gleichung (34), so kommt

$$(45) \quad R_{2i+1}^{(2i+1)} = R_{2i}^{(2i)} - \frac{4i+1}{2i} R_{2i+1}^{(2i)} \sin k$$

Der Ausdruck für $R_{\mu+1}^{(\mu)}$ des Art. 36 giebt aber, wenn man darin $\mu = 2i$ und $k = \frac{\pi}{4}$ setzt,

$$R_{2i+1}^{(2i)} = 0$$

es wird also

$$R_{2i+1}^{(2i+1)} = R_{2i}^{(2i)}$$

und wir bekommen zugleich für die obige Reihe folgenden Summenausdruck

$$(46) \quad \frac{2i-1}{2} E_{2i} = (-1)^{i+1} \frac{2\mu}{\pi} \left\{ \frac{1}{\mu^2} + \frac{E_2}{\mu^2-4} - \frac{3E_4}{\mu^2-16} + \frac{5E_6}{\mu^2-36} + \text{etc.} \right\}$$

wo $2i+1$ für μ gesetzt werden muss.

Differentiirt man die Gleichung (45), und verschiebt den Index um eine Einheit, so wird

$$\frac{dR_{2i+2}^{(2i+2)}}{dk} = \frac{dR_{2i+1}^{(2i+1)}}{dk} - \frac{4i+3}{2i+1} \frac{d \cdot R_{2i+2}^{(2i+1)} \sin k}{dk}$$

Der Ausdruck von $R_{\mu+1}^{(\mu)}$ des Art. 36 giebt durch die Differentiation

$$\begin{aligned} \frac{d \cdot R_{\mu+1}^{(\mu)} \sin k}{dk} = & 2\mu^2 \frac{\cos 2\mu k}{\pi} \left\{ \frac{1}{\mu} + \frac{E_1}{\mu+1} \cos 2k + \frac{E_2}{\mu+2} \cos 4k + \text{etc.} \right\} \\ & - 2\mu^2 \frac{\sin 2\mu k}{\pi} \left\{ \frac{E_1}{\mu+1} \sin 2k + \frac{E_2}{\mu+2} \sin 4k + \text{etc.} \right\} \\ & - \mu \frac{\sin 2\mu k}{\pi} \left\{ \frac{2E_1}{\mu+1} \sin 2k + \frac{4E_2}{\mu+2} \sin 4k + \text{etc.} \right\} \\ & + \mu \frac{\cos 2\mu k}{\pi} \left\{ \frac{2E_1}{\mu+1} \cos 2k + \frac{4E_2}{\mu+2} \cos 4k + \text{etc.} \right\} \\ & + \mu \frac{\sin 2\mu k}{\pi} \left\{ \frac{\frac{dE_1}{dk}}{\mu+1} \cos 2k + \frac{\frac{dE_2}{dk}}{\mu+2} \cos 4k + \text{etc.} \right\} \\ & + \mu \frac{\cos 2\mu k}{\pi} \left\{ \frac{\frac{dE_1}{dk}}{\mu+1} \sin 2k + \frac{\frac{dE_2}{dk}}{\mu+2} \sin 4k + \text{etc.} \right\} \end{aligned}$$

Setzt man hierin $\mu = 2i+1$ und $k = \frac{\pi}{4}$, so ergibt sich

$$\frac{d \cdot R_{2i+2}^{(2i+1)} \sin k}{dk} = 0$$

und es wird also

$$\frac{dR_{2i}^{(2i)}}{dk} = \frac{dR_{2i-1}^{(2i-1)}}{dk}$$

Differentiirt man endlich den Ausdruck von $R_{\mu}^{(\mu)}$ des Art. 36 nach k , und setzt nach der Differentiation $\mu = 2i+1$ und $k = \frac{\pi}{4}$, so bekommt man zuerst

$$\frac{dR_{2i+1}^{(2i+1)}}{dk} = (-1)^{i+1} \frac{4\mu}{\pi} \left\{ \frac{1}{\mu^2} + \frac{E_2}{\mu^2-4} - \frac{3E_4}{\mu^2-16} + \frac{5E_6}{\mu^2-36} + \text{etc.} \right\} - i \frac{dE_{2i+1}}{dk}$$

und dieser verwandelt sich vermöge der Gleichung (46) in

$$\frac{dR_{2i+1}^{(2i+1)}}{dk} = (2i-1) E_{2i} - i \frac{dE_{2i+1}}{dk}$$

womit die speciellen Summationen ausgeführt sind. Substituirt man die Werthe der E Coefficienten des vor. Art., so ergibt sich für $k = \frac{\pi}{4}$,

$$\begin{aligned} R_{2i}^{(2i)} = R_{2i+1}^{(2i+1)} &= (-1)^i \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2i-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i} \cdot \frac{1}{2^{i+1}} \\ \frac{dR_{2i+2}^{(2i+2)}}{dk} = \frac{dR_{2i+1}^{(2i+1)}}{dk} &= (-1)^{i+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2i-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i} \cdot \frac{2i+1}{2^i} \end{aligned}$$

Um die eben gefundenen Ausdrücke zur Bestimmung unserer beiden willkürlichen Constanten bequem anwenden zu können, ist erforderlich, dass sie in halb convergirende Reihen umgewandelt werden. Die einfachste

Art dahin zu gelangen scheint mir die folgende zu sein. In *Euler's Inst. cal. diff. Cap. VI. art. 159* ist folgende Gleichung bewiesen,

$$\log 1 + \log 2 + \dots + \log n = \frac{1}{2} \log 2\pi + (n + \frac{1}{2}) \log n - n + \frac{A}{1.2.n} - \frac{B}{3.4.n^3} + \frac{C}{5.6.n^5} \mp \text{etc.}$$

wo A, B, C , etc. die Bernouillischen Zahlen sind, nemlich

$$A = \frac{1}{6}, \quad B = \frac{1}{30}, \quad C = \frac{1}{42}, \quad D = \frac{1}{30}, \quad \text{etc.}$$

Nennt man nun wieder die Grundzahl der natürlichen Logarithmen c , und setzt

$$\begin{aligned} \Pi(n) &= 1.2.3 \dots n \\ U_n &= \frac{A}{1.2.n} - \frac{B}{3.4.n^3} + \frac{C}{5.6.n^5} \mp \text{etc.} \end{aligned}$$

so verwandelt man diese *Eulersche* Gleichung leicht in

$$\Pi(n) = n^n c^{-n} \sqrt{2n\pi} \cdot c^{U_n}$$

aber es ist

$$\frac{1.3.5 \dots 2n-1}{1.2.3 \dots n} = \frac{\Pi(2n)}{2^n (\Pi(n))^2}$$

also auch

$$\frac{1.3.5 \dots 2n-1}{1.2.3 \dots n} = \frac{2^n}{\sqrt{n\pi}} c^{U_{2n} - 2U_n}$$

wo

$$U_{2n} - 2U_n = -\frac{1}{8n} + \frac{1}{192n^3} - \frac{1}{640n^5} \pm \text{etc.}$$

Löst man die Exponentialgrösse in eine unendliche Reihe auf, so findet man

$$\frac{1.3.5 \dots 2n-1}{1.2.3 \dots n} = \frac{2^n}{\sqrt{n\pi}} J_n$$

wo

$$J_n = 1 - \frac{1}{8n} + \frac{1}{128n^2} + \frac{5}{4024n^3} - \frac{21}{32768n^4} - \frac{399}{262144n^5} + \text{etc.}$$

Wendet man nun diese Entwicklung auf die zu Ende des vor. Art. gegebenen Ausdrücke an, so wird

$$R_{2i}^{(2i)} = (-1)^i \frac{1}{2\sqrt{i\pi}} J_i$$

$$R_{2i+1}^{(2i+1)} = (-1)^i \frac{1}{2\sqrt{i\pi}} J_i$$

$$\frac{dR_{2i}^{(2i)}}{dk} = (-1)^i \frac{2i}{\sqrt{i\pi}} J_i$$

$$\frac{dR_{2i+1}^{(2i+1)}}{dk} = -(-1)^i \frac{2i+1}{\sqrt{i\pi}} J_i$$

Diese Ausdrücke nehmen eine nicht minder merkwürdige Form an, wenn man μ darin einführt, und zwar in dem ersten und dritten durch die Gleichungen,

$$i = \frac{\mu}{2}, \quad i^2 = \frac{\mu^2}{4}, \quad \text{etc.}$$

und in dem zweiten und vierten durch

$$\frac{1}{r_i} = \frac{r_2}{r_\mu} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\mu}}} = \frac{r_2}{r_\mu} \left\{ 1 + \frac{1}{2\mu} + \frac{3}{8\mu^2} + \frac{5}{16\mu^3} + \frac{35}{128\mu^4} + \frac{63}{256\mu^5} + \text{etc.} \right\}$$

$$\frac{1}{i r_i} = \frac{r_2}{r_\mu} \cdot \frac{1}{\mu \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{r_2}{r_\mu} \left\{ \frac{2}{\mu} + \frac{3}{\mu^2} + \frac{15}{4\mu^3} + \frac{35}{8\mu^4} + \frac{315}{64\mu^5} + \text{etc.} \right\}$$

etc.

Es wird durch diese Substitution

1) wenn μ eine grade Zahl ist,

$$R_\mu^{(\mu)} = (-1)^{\frac{\mu}{2}} \frac{1}{r_{2\mu\pi}} K$$

$$\frac{dR_\mu^{(\mu)}}{dk} = (-1)^{\frac{\mu}{2}} \frac{2\mu}{r_{2\mu\pi}} K$$

wo

$$K = 1 - \frac{1}{4\mu} + \frac{1}{32\mu^2} + \frac{5}{128\mu^3} - \frac{21}{2048\mu^4} - \frac{399}{8192\mu^5} + \text{etc.}$$

2) wenn μ eine ungrade Zahl ist,

$$R_\mu^{(\mu)} = (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \frac{1}{r_{2\mu\pi}} K^1$$

$$\frac{dR_\mu^{(\mu)}}{dk} = - (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \frac{2\mu}{r_{2\mu\pi}} K^1$$

wo

$$K^1 = 1 + \frac{1}{4\mu} + \frac{1}{32\mu^2} - \frac{5}{128\mu^3} - \frac{21}{2048\mu^4} + \frac{399}{8192\mu^5} + \text{etc.}$$

Diese letzteren Ausdrücke unterscheiden sich von den ersteren nur dadurch, dass die mit den ungraden Potenzen von μ behafteten Glieder das entgegengesetzte Zeichen haben.

40.

Setzt man nun $k = \frac{\pi}{4}$ in die Gleichung (40), und erwägt, dass dadurch $x = 1$ wird, so entsteht

$$R_\mu^{(\mu)} = 2h\mathfrak{L} \cos\left(\frac{\mu\pi}{2} - l\right) + 2h\mathfrak{M} \sin\left(\frac{\mu\pi}{2} - l\right)$$

wo

$$\mathfrak{L} = 1 + \frac{3}{256\mu^2} - \frac{1845}{262144\mu^4} + \text{etc.}$$

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{4\mu} - \frac{45}{4024\mu^3} + \frac{52875}{4048576\mu^5} + \text{etc.}$$

Differentiirt man die Gleichung (40) nach k , setzt nach der Differentiation $k = \frac{\pi}{4}$, und erwägt dass daraus

$$\frac{dx}{dk} = -1$$

folgt, so bekommt man

$$\frac{dR_{\mu}^{(\mu)}}{dk} = -4\mu h \mathfrak{L} \sin\left(\frac{\mu\pi}{2} - l\right) - 4\mu h \mathfrak{M} \cos\left(\frac{\mu\pi}{2} - l\right)$$

wo die Reihen dieselben sind wie in dem vorstehenden Ausdruck von $R_{\mu}^{(\mu)}$. Wenn nun μ eine grade Zahl ist, so wird

$$\sin\left(\frac{\mu\pi}{2} - l\right) = -(-1)^{\frac{\mu}{2}} \sin l$$

$$\cos\left(\frac{\mu\pi}{2} - l\right) = (-1)^{\frac{\mu}{2}} \cos l$$

Substituirt man diese Werthe in die vorstehenden Ausdrücke, und setzt diese dann den bez. Ausdrücken des vor. Art. gleich, so erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{2\mu\pi}} K = 2h \cos l \cdot \mathfrak{L} - 2h \sin l \cdot \mathfrak{M}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\mu\pi}} K = 2h \sin l \cdot \mathfrak{L} - 2h \cos l \cdot \mathfrak{M}$$

Hieraus geht hervor dass

$$\cos l = \sin l$$

ist, welcher durch

$$l = \frac{\pi}{4}$$

Genüge geleistet wird. Substituirt man diesen Werth, so wird

$$\frac{1}{\sqrt{\mu\pi}} K = 2h \{\mathfrak{L} - \mathfrak{M}\}$$

und wenn man die obigen Ausdrücke von K , $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ substituirt, und die Division ausführt,

$$2h = \frac{1}{\sqrt{\mu\pi}} \left\{ 1 + \frac{5}{256\mu^2} - \frac{903}{262144\mu^4} + \text{etc.} \right\}$$

Wenn μ eine ungrade Zahl ist, so wird

$$\sin\left(\frac{\mu\pi}{2} - l\right) = (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \cos l$$

$$\cos\left(\frac{\mu\pi}{2} - l\right) = (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \sin l$$

und hieraus bekommt man auf dieselbe Art wie oben

$$\frac{1}{\sqrt{2\mu\pi}} K^1 = 2h \sin l \cdot \mathfrak{L} + 2h \cos l \cdot \mathfrak{M}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\mu\pi}} K^1 = 2h \cos l \cdot \mathfrak{L} + 2h \sin l \cdot \mathfrak{M}$$

also wieder $\sin l = \cos l$. Setzt man daher wieder $l = \frac{\pi}{4}$ in diese Gleichungen, so geben sie

$$\frac{1}{\sqrt{\mu\pi}} K^1 = 2h \{ \mathfrak{L} + \mathfrak{M} \}$$

Die Vergleichung dieser Gleichung mit der oben für h gefundenen zeigt, dass daraus derselbe Werth für h hervorgehen muss. Es wird also ohne Rücksicht auf die Form von μ allgemein

$$R_{\mu}^{(\mu)} = c \cos(2\mu k - 45^\circ) \left\{ x - \frac{C_2}{\mu^2} + \frac{C_4}{\mu^4} \mp \text{etc.} \right\} \\ + c \sin(2\mu k - 45^\circ) \left\{ \frac{C_1}{\mu} - \frac{C_3}{\mu^3} + \frac{C_5}{\mu^5} \mp \text{etc.} \right\}$$

wo

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\pi}} \left\{ 1 + \frac{5}{256\mu^2} - \frac{903}{262144\mu^4} + \text{etc.} \right\}$$

und die Werthe von $C_1, C_2, \text{etc.}$ des Art. 33 anzuwenden sind.

Es wurde oben gezeigt, dass die endlichen Ausdrücke des Art. 30 für $R_{\mu}^{(\mu)}$ in den Fällen, wo bei grossem μ der Winkel k Mittelwerthe zwischen seinen Grenzen 0 und 90° einnimmt, am wenigsten geeignet sind, auf bequeme Art den Werth von $R_{\mu}^{(\mu)}$ zu geben. Der Ausdruck für x zeigt, dass grade in diesen Fällen bei übrigens gleichen Werthen von μ die vorstehende halbconvergirende Reihe am stärksten convergirt. Je mehr sich k einer seiner beiden Grenzen nähert, desto schwächer wird bei gleichen Werthen von μ die Convergenz derselben, aber grade in diesen Fällen wird der eine der Ausdrücke des Art. 30 zur Berechnung geeignet. Bei gleichen Werthen von k nimmt bei wachsendem μ jedenfalls die Convergenz der halbconvergirenden Reihe zu, und wenn daher bei kleinem oder grossem k die Zahl μ so gross ist, dass die Benutzung der beiden Ausdrücke des Art. 30 unbequem wird, so wird die halbconvergirende Reihe dienen können. Die Anzahl der oben numerisch entwickelten C Coefficienten wird wohl in jedem Falle, wo es der vorhergehenden Auseinandersetzung zufolge zweckmässig ist sich ihrer zu bedienen, hinreichend sein. Ich bemerke noch, dass diese Coefficienten von μ unabhängig sind, und dass sie daher in den Fällen, wo man den Coefficienten $R_{\mu}^{(\mu)}$ zwar für mehrere Werthe von μ , aber einem und demselben Werthe der Excentricität oder k entsprechend, zu berechnen hat, dieselben bleiben, und nur ein Mal berechnet zu werden brauchen.

41.

Im Vorstehenden ist alles enthalten, welches zur bequemen Berechnung von $R_{\mu}^{(\mu)}$ erforderlich ist, ich will indess noch einen merk-

würdigen Satz geben, welcher sich aus einer der obigen Relationen leicht ableiten lässt. Schreiben wir jetzt, da verschiedene Werthe von k in Betracht gezogen werden sollen, $R_{\mu}^{(\mu, k)}$ statt $R_{\mu}^{(\mu)}$, setzen in den im Art. 36 entwickelten Ausdruck von $R_{\mu}^{(\mu)}$, k^1 statt k , und bezeichnen die daraus hervorgehenden Werthe der E Coefficienten durch E^1 , so wird

$$R_{\mu}^{(\mu, k^1)} = \frac{\mu \sin 2\mu k^1}{\pi \sin^2 k^1} \left\{ \frac{1}{\mu^2} - \frac{E_2^1}{\mu^2 - 4} \cos 4k^1 - \frac{2E_3^1}{\mu^2 - 9} \cos 6k^1 - \frac{3E_4^1}{\mu^2 - 16} \cos 8k^1 - \text{etc.} \right\} \\ + \frac{\cos 2\mu k^1}{\pi \sin^2 k^1} \left\{ E_1^1 \sin 2k^1 + \frac{\mu^2 - 2}{\mu^2 - 4} E_2^1 \sin 4k^1 + \frac{\mu^2 - 3}{\mu^2 - 9} E_3^1 \sin 6k^1 + \frac{\mu^2 - 4}{\mu^2 - 16} E_4^1 \sin 8k^1 + \text{etc.} \right\} \\ + \frac{\mu + 1}{4\mu} E_{\mu}^1 \frac{\sin 4\mu k^1}{\pi \sin^2 k^1} - (\mu - 1) \frac{k^1 E_{\mu}^1}{\pi \sin^2 k^1}$$

Setzt man nun

$$k^1 = \frac{\pi}{2} - k$$

so bekommt man die Gleichungen

$$\sin^2 k^1 = \cos^2 k$$

$$\sin 2\mu k^1 = -(-1)^{\mu} \sin 2\mu k$$

$$\cos 2\mu k^1 = (-1)^{\mu} \cos 2\mu k$$

$$\sin 4\mu k^1 = -\sin 4\mu k$$

$$\sin 2k^1 = \sin 2k$$

$$\sin 4k^1 = -\sin 4k$$

$$\sin 6k^1 = \sin 6k$$

etc.

$$\cos 4k^1 = \cos 4k$$

$$\cos 6k^1 = -\cos 6k$$

etc.

$$E_n^1 = (-1)^n E_n$$

wodurch der vorstehende Ausdruck in

$$R_{\mu}^{(\mu, \frac{\pi}{2} - k)} = -(-1)^{\mu} \frac{\mu \sin 2\mu k}{\pi \cos^2 k} \left\{ \frac{1}{\mu^2} - \frac{E_2}{\mu^2 - 4} \cos 4k - \frac{2E_3}{\mu^2 - 9} \cos 6k - \frac{3E_4}{\mu^2 - 16} \cos 8k - \text{etc.} \right\} \\ - (-1)^{\mu} \frac{\cos 2\mu k}{\pi \cos^2 k} \left\{ E_1 \sin 2k + \frac{\mu^2 - 2}{\mu^2 - 4} E_2 \sin 4k + \frac{\mu^2 - 3}{\mu^2 - 9} E_3 \sin 6k + \frac{\mu^2 - 4}{\mu^2 - 16} E_4 \sin 8k + \text{etc.} \right\} \\ - (-1)^{\mu} \frac{\mu + 1}{4\mu} E_{\mu} \frac{\sin 4\mu k}{\pi \cos^2 k} + (-1)^{\mu} (\mu - 1) \frac{k E_{\mu}}{\pi \cos^2 k} - (-1)^{\mu} (\mu - 1) \frac{E_{\mu}}{2 \cos^2 k}$$

übergeht. Vergleicht man diesen mit dem Ausdruck für $R_{\mu}^{(\mu)}$ des Art. 36, so kommt sogleich

$$R_{\mu}^{(\mu, \frac{\pi}{2} - k)} = -(-1)^{\mu} R_{\mu}^{(\mu, k)} \operatorname{tg}^2 k - (-1)^{\mu} \frac{(\mu - 1)}{2} \frac{E_{\mu}}{\cos^2 k}$$

durch welche Relation die Werthe von $R_{\mu}^{(\mu)}$ für ein grosses k auf die für

ein kleines k zurück geführt werden. Es folgt hieraus von selbst die entgegengesetzte Relation, wodurch $R_{\mu}^{(\mu)}$ für ein kleines k auf $R_{\mu}^{(\mu)}$ für ein grosses k hingeführt wird.

§ III.

Entwicklung der Functionen $\varrho^n \cos mf$ und $\varrho^n \sin mf$ in Reihen, die nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen der excentrischen Anomalie fortschreiten.

42.

Die Entwicklungen der beiden vor. §§ geben schon, wenn sie mit einander verbunden werden, die Auflösung dieser Aufgabe. Es war

$$\varrho^n x^m = \sum V_i^{(n)} x^{m+i}$$

$$x^m = \sum R_i^{(m)} y^i$$

Setzt man daher

$$\varrho^n x^m = \sum W_i^{n,m} y^i$$

so erhält man aus der Multiplication der beiden ersten Reihen mit einander,

$$W_i^{n,m} = V_0^{(n)} R_i^{(m)} + V_1^{(n)} R_i^{(m+1)} + V_2^{(n)} R_i^{(m+2)} + \text{etc.} \\ + V_1^{(n)} R_i^{(m-1)} + V_2^{(n)} R_i^{(m-2)} + \text{etc.}$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

43.

Man kann aber diese Aufgabe auch direct lösen, und bekommt dadurch, namentlich wenn n eine ganze und positive Zahl, und $m \leq n$ ist, einfache Resultate, indem man auf lauter endliche Ausdrücke hingeführt wird.

Die Gleichung

$$\varrho = 1 - \sin \varphi \cos \varepsilon$$

giebt, wenn wir die zur wahren und excentrischen Anomalie gehörigen, imaginären Exponentialfunctionen wieder mit x und y bezeichnen, wodurch wie oben

$$x = y \frac{1 - \frac{\beta}{y}}{1 - \beta y}$$

wird,

$$\varrho^n x^m = \cos^{2n} \frac{1}{2} \varphi y^m (1 - \beta y)^{n-m} \left(1 - \frac{\beta}{y}\right)^{n+m}$$

Durch die Entwicklung der beiden Binomien ergibt sich

$$(1 - \beta y)^{n-m} = 1 - \frac{n-m}{1} \beta y + \frac{n-m \cdot n-m-1}{1 \cdot 2} \beta^2 y^2 - \frac{n-m \cdot n-m-1 \cdot n-m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \beta^3 y^3 \pm \text{etc.}$$

$$\left(1 - \frac{\beta}{y}\right)^{n+m} = 1 - \frac{n+m}{1} \frac{\beta}{y} + \frac{n+m \cdot n+m-1}{1 \cdot 2} \frac{\beta^2}{y^2} - \frac{n+m \cdot n+m-1 \cdot n+m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{\beta^3}{y^3} \pm \text{etc.}$$

und hieraus

$$W_m^{n,m} = \cos^{2n} \frac{1}{2} \varphi \left\{ 1 + \frac{n^2-m^2}{1^2} \beta^2 + \frac{n^2-m^2 \cdot (n-1)^2-m^2}{1^2 \cdot 2^2} \beta^4 + \frac{n^2-m^2 \cdot (n-1)^2-m^2 \cdot (n-2)^2-m^2}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} \beta^6 + \text{etc.} \right\}$$

$$W_{m+1}^{n,m} = -\cos^{2n} \frac{1}{2} \varphi \left\{ \frac{n-m}{1} \beta + \frac{n^2-m^2 \cdot n-1-m}{1^2 \cdot 2} \beta^3 + \frac{n^2-m^2 \cdot (n-1)^2-m^2 \cdot n-2-m}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3} \beta^5 + \text{etc.} \right\}$$

$$W_{m+2}^{n,m} = \cos^{2n} \frac{1}{2} \varphi \left\{ \frac{n-m \cdot n-1-m}{1 \cdot 2} \beta^2 + \frac{n^2-m^2 \cdot n-1-m \cdot n-2-m}{1^2 \cdot 2 \cdot 3} \beta^4 + \frac{n^2-m^2 \cdot (n-1)^2-m^2 \cdot n-2-m \cdot n-3-m}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 4} \beta^6 + \text{etc.} \right\}$$

etc. etc.

$$W_{m-1}^{n,m} = -\cos^{2n} \frac{1}{2} \varphi \left\{ \frac{n+m}{1} \beta + \frac{n^2-m^2 \cdot n-1+m}{1^2 \cdot 2} \beta^3 + \frac{n^2-m^2 \cdot (n-1)^2-m^2 \cdot n-2+m}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3} \beta^5 + \text{etc.} \right\}$$

$$W_{m-2}^{n,m} = \cos^{2n} \frac{1}{2} \varphi \left\{ \frac{n+m \cdot n-1+m}{1 \cdot 2} \beta^2 + \frac{n^2-m^2 \cdot n-1+m \cdot n-2+m}{1^2 \cdot 2 \cdot 3} \beta^4 + \frac{n^2-m^2 \cdot (n-1)^2-m^2 \cdot n-2+m \cdot n-3+m}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 4} \beta^6 + \text{etc.} \right\}$$

etc. etc.

Diese Ausdrücke zeigen sogleich, dass unter den oben genannten Bedingungen nicht bloß jeder W Coefficient aus einer endlichen Anzahl von Gliedern besteht, sondern auch die Anzahl dieser Coefficienten endlich ist. Diese ist stets unabhängig von m und $= 2n + 1$; sie erstreckt sich

$$\text{von } W_{-n}^{n,m} \text{ bis } W_{+n}^{n,m}$$

Die Anzahl der Glieder, aus welchen jeder Coefficient besteht, ist höchstens $= n - m + 1$, sie wächst im Allgemeinen mit der Differenz $n - m$. Die obigen Ausdrücke geben ferner zu erkennen, dass stets

$$W_i^{n,m} = W_{-i}^{n,-m}$$

ist, welcher Satz auch schon eine nothwendige Folge davon ist, $\varrho^n \cos mf$ und $\varrho^n \sin mf$ reelle Grössen sind.

44.

Man kann zwischen je drei auf einander folgenden W Coefficienten, die denselben Werthen von n und m zugehören, eine linearische Gleichung finden. Die Gleichungen

$$(47) \quad \begin{cases} \varrho = \cos^{2n} \frac{1}{2} \varphi \left(1 + \beta^2 - \beta \left(y + \frac{1}{y} \right) \right) \\ x = \frac{y - \beta}{1 - \beta y} \end{cases}$$

geben durch die Differentiation

$$\frac{d\rho}{dy} = \beta \cos^2 \frac{1}{2} \varphi \left(\frac{1}{y^2} - 1 \right)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta y)^2}$$

Hiemit wird zuerst

$$\frac{d \cdot \rho^n x^m}{dy} = n \beta \cos^2 \frac{1}{2} \varphi \cdot \rho^{n-1} x^m \left(\frac{1}{y^2} - 1 \right) + m (1 - \beta^2) \frac{\rho^n x^{m-1}}{(1 - \beta y)^2}$$

die sich leicht in

$$\{y(1 + \beta^2) - \beta - \beta y^2\} \frac{d \cdot \rho^n x^m}{dy} = n \beta \rho^n x^m \left(\frac{1}{y} - y \right) + m (1 - \beta^2) \rho^n x^m$$

verwandeln lässt. Substituirt man hierin die Werthe

$$\rho^n x^m = \sum W_i^{n,m} y^i; \quad \frac{d \cdot \rho^n x^m}{dy} = \sum i W_i^{n,m} y^{i-1}$$

so bekommt man sogleich

$$(i+1+n) \beta W_{i+1}^{n,m} - [i-m + (i+m) \beta^2] W_i^{n,m} + (i-1-n) \beta W_{i-1}^{n,m} = 0 \quad (48)$$

welche mit (36) übereinstimmt, wenn man $n = 0$ macht.

Um von einem Exponenten zu andern überzugehen, lassen sich zwischen vier W Coefficienten zweckmässige Gleichungen finden. Die (47) geben, nachdem die erste durch die zweite dividirt, und der Quotient mit $\rho^n x^m$ multiplicirt worden ist,

$$\rho^{n+1} x^{m-1} = \cos^2 \frac{1}{2} \varphi \left(\frac{1}{y} - 2\beta + \beta^2 y \right) \rho^n x^m$$

woraus

$$W_i^{n+1,m-1} = \cos^2 \frac{1}{2} \varphi W_{i+1}^{n,m} - 2\beta \cos^2 \frac{1}{2} \varphi W_i^{n,m} + \beta^2 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi W_{i-1}^{n,m} \quad (49)$$

folgt. *) Durch Hülfe dieser Gleichung kann man aus dem einzigen Werthe $\rho^0 = 1$ alle diejenigen W Coefficienten für jeden positiven und ganzen Werth von n , und jeden ganzen Werth von m , welcher $\leq n$ ist, berechnen, die man vorzugsweise in der Störungstheorie braucht, nemlich die Coefficienten von

$$\rho x; \rho x^{-1}; \rho^2 x^2; \rho^2; \rho^2 x^{-2}; \text{etc.}$$

Um dieses zu zeigen, will ich die Formeln für die ersten derselben anführen.

*) Durch Hülfe von (48) kann man hier einen beliebigen der W Coefficienten rechter Hand eliminiren, und dadurch eine Gleichung zwischen drei dieser Coefficienten erhalten.

Die Gleichung $\varphi^0 = 1$ giebt $W_0^{0,0} = 1$ und alle übrigen W Coefficienten sind für $n = 0, m = 0$ gleich Null. Setzt man nun $n = 0, m = 0$, und nach einander $i = -1, i = 0, i = 1$, in (49), so erhält man

$$W_{-1}^{1,-1} = \cos \frac{1}{2}\varphi; \quad W_0^{1,-1} = -2\beta \cos \frac{1}{2}\varphi; \quad W_1^{1,-1} = \beta^2 \cos \frac{1}{2}\varphi$$

und hieraus wegen $W_i^{n,m} = W_{-i}^{n,-m}$

$$W_{-1}^{1,1} = \beta^2 \cos \frac{1}{2}\varphi; \quad W_0^{1,1} = -2\beta \cos \frac{1}{2}\varphi; \quad W_1^{1,1} = \cos \frac{1}{2}\varphi$$

Setzt man ferner $n = 1, m = -1$, und nach einander $i = -2, i = -1$, etc. bis $i = 2$, so entstehen

$$W_{-2}^{2,-2} = \cos \frac{1}{2}\varphi W_{-1}^{1,-1}$$

$$W_{-1}^{2,-2} = \cos \frac{1}{2}\varphi W_0^{1,-1} - 2\beta \cos \frac{1}{2}\varphi W_{-1}^{1,-1}$$

$$W_0^{2,-2} = \cos \frac{1}{2}\varphi W_1^{1,-1} - 2\beta \cos \frac{1}{2}\varphi W_0^{1,-1} + \beta^2 \cos \frac{1}{2}\varphi W_{-1}^{1,-1}$$

$$W_1^{2,-2} = -2\beta \cos \frac{1}{2}\varphi W_1^{1,-1} + \beta^2 \cos \frac{1}{2}\varphi W_0^{1,-1}$$

$$W_2^{2,-2} = \beta^2 \cos \frac{1}{2}\varphi W_1^{1,-1}$$

Setzt man $n = 1, m = 1, i = -2$, etc. so kommt

$$W_{-2}^{2,0} = \cos \frac{1}{2}\varphi W_{-1}^{1,1}$$

$$W_{-1}^{2,0} = \cos \frac{1}{2}\varphi W_0^{1,1} - 2\beta \cos \frac{1}{2}\varphi W_{-1}^{1,1}$$

$$W_0^{2,0} = \cos \frac{1}{2}\varphi W_1^{1,1} - 2\beta \cos \frac{1}{2}\varphi W_0^{1,1} + \beta^2 \cos \frac{1}{2}\varphi W_{-1}^{1,1}$$

etc.

Die übrigen Coefficienten für $n = 2$ bekommt man aus diesen durch die Gleichung $W_i^{n,m} = W_{-i}^{n,-m}$.

Setzt man $n = 2, m = -2, i = -3$, etc. so geben die vorstehenden Coefficienten mit Zuziehung von (49)

$$W_{-3}^{3,-3} = \cos \frac{1}{2}\varphi W_{-2}^{2,-2}$$

$$W_{-2}^{3,-3} = \cos \frac{1}{2}\varphi W_{-1}^{2,-2} - 2\beta \cos \frac{1}{2}\varphi W_{-2}^{2,-2}$$

$$W_{-1}^{3,-3} = \cos \frac{1}{2}\varphi W_0^{2,-2} - 2\beta \cos \frac{1}{2}\varphi W_{-1}^{2,-2} + \beta^2 \cos \frac{1}{2}\varphi W_{-2}^{2,-2}$$

$$W_0^{3,-3} = \cos \frac{1}{2}\varphi W_1^{2,-2} - 2\beta \cos \frac{1}{2}\varphi W_0^{2,-2} + \beta^2 \cos \frac{1}{2}\varphi W_{-1}^{2,-2}$$

$$W_1^{3,-3} = \cos \frac{1}{2}\varphi W_2^{2,-2} - 2\beta \cos \frac{1}{2}\varphi W_1^{2,-2} + \beta^2 \cos \frac{1}{2}\varphi W_0^{2,-2}$$

$$W_2^{3,-3} = -2\beta \cos \frac{1}{2}\varphi W_2^{2,-2} + \beta^2 \cos \frac{1}{2}\varphi W_1^{2,-2}$$

$$W_3^{3,-3} = \beta^2 \cos \frac{1}{2}\varphi W_2^{2,-2}$$

Mit $n = 2, m = 0, i = -3$, etc. wird

$$\begin{aligned} W_{-3}^{3,-1} &= \cos \frac{1}{2}\varphi W_{-2}^{2,-2} \\ W_{-2}^{3,-1} &= \cos \frac{1}{2}\varphi W_{-1}^{2,-2} - 2\beta \cos \frac{1}{2}\varphi W_{-2}^{2,-2} \\ W_{-1}^{3,-1} &= \cos \frac{1}{2}\varphi W_0^{2,-2} - 2\beta \cos \frac{1}{2}\varphi W_{-1}^{2,-2} + \beta^2 \cos \frac{1}{2}\varphi W_{-2}^{2,-2} \\ W_0^{3,-1} &= \cos \frac{1}{2}\varphi W_1^{2,-2} - 2\beta \cos \frac{1}{2}\varphi W_0^{2,-2} + \beta^2 \cos \frac{1}{2}\varphi W_{-1}^{2,-2} \\ W_1^{3,-1} &= \cos \frac{1}{2}\varphi W_2^{2,-2} - 2\beta \cos \frac{1}{2}\varphi W_1^{2,-2} + \beta^2 \cos \frac{1}{2}\varphi W_0^{2,-2} \\ W_2^{3,-1} &= -2\beta \cos \frac{1}{2}\varphi W_2^{2,-2} + \beta^2 \cos \frac{1}{2}\varphi W_1^{2,-2} \\ W_3^{3,-1} &= \beta^2 \cos \frac{1}{2}\varphi W_2^{2,-2} \end{aligned}$$

u. s. w.

Diese Art der Berechnung hat keine Unsicherheit im Gefolge, weil alle Multiplicatoren kleiner sind wie Eins, und keine Subtractionen vorkommen, indem die W Coefficienten abwechselnd positiv und negativ sind. Man kann durch dieselben Gleichungen auch die Coefficienten für die zwischenliegenden Werthe von m berechnen, wenn man ursprünglich ausser der Gleichung $\rho^0 = 1$ auch

$$\rho = -\beta \cos \frac{1}{2}\varphi \cdot y^{-1} + (1 + \beta^2) \cos \frac{1}{2}\varphi - \beta \cos \frac{1}{2}\varphi \cdot y$$

zu Hülfe nimmt, welche

$$W_1^{1,0} = W_{-1}^{1,0} = -\beta \cos \frac{1}{2}\varphi; \quad W_0^{1,0} = (1 + \beta^2) \cos \frac{1}{2}\varphi$$

giebt. Man kann diese Rechnung auch noch auf andere Art ausführen, denn auf ähnliche Weise, wie (49) gefunden wurde, findet man auch dass

$$W_i^{n+1,m+1} = \cos \frac{1}{2}\varphi W_{i-1}^{n,m} - 2\beta \cos \frac{1}{2}\varphi W_i^{n,m} + \beta^2 \cos \frac{1}{2}\varphi W_{i+1}^{n,m}$$

ist. Für $W_i^{n,n}$ ergeben sich aus den Ausdrücken des Art. 43 sofort die folgenden einfachen Ausdrücke

$$\begin{aligned} W_n^{n,n} &= \cos \frac{1}{2}\varphi; \quad W_{n-1}^{n,n} = -\frac{2n}{1} \beta W_n^{n,n}; \quad W_{n-2}^{n,n} = -\frac{2n-1}{2} \beta W_{n-1}^{n,n}; \\ W_{n-3}^{n,n} &= -\frac{2n-2}{3} \beta W_{n-2}^{n,n}; \text{ etc.} \end{aligned}$$

die in dieser Rechnung auch mit Vortheil angewandt werden können. Es lassen sich noch viele Gleichungen zwischen den W Coefficienten ableiten, die ich aber hier weglasse, weil die vorstehenden ihren Zweck sicher und leicht erfüllen.

45.

Die W Coefficienten können auch auf ähnliche Weise wie die der vor. §§ durch Kettenbrüche berechnet werden, und wenn man sie auf die im vor. Art. dargelegte Art berechnet, so ist es zur Controlle dienlich, auch einige derselben auf die folgende Art zu berechnen. Setzt man $m+i$ statt i in die Gleichung (48), so kommt

$$0 = (m+n+i+1) \beta W_{m+i+1}^{n,m} - (i+(i+2m)\beta^2) W_{m+i}^{n,m} + (m-n+i-1) \beta W_{m+i-1}^{n,m}$$

Nimmt man i stets positiv, und setzt von $i=1$ bis $i=n-m$,

$$\frac{W_{m+i}^{n,m}}{W_{m+i-1}^{n,m}} = p_i; \quad p_i = -F_i \theta_i$$

$$F_i = \frac{n-m-i+1}{i+(i+2m)\beta^2} \beta = \frac{n-m-i+1}{i+2m \sin^2 \frac{1}{2}\varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{2}$$

$$\lambda_i = \frac{(n-m+i)(n+m-i+1)\beta^2}{[i+(i+2m)\beta^2][i-1+(i-1+2m)\beta^2]} = F_i \frac{n+m+i}{i-1+2m \sin^2 \frac{1}{2}\varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{2}$$

so bekommt man

$$\theta_{i-1} = \frac{1}{1+\lambda_i \theta_i}; \quad \theta_{i-2} = \frac{1}{1+\lambda_{i-1} \theta_{i-1}}; \quad \text{etc.}$$

$$W_{m+i}^{n,m} = W_m^{n,m} p_1 p_2 p_3 \dots p_i$$

Der Anfangswerth ist hier

$$\theta_{n-m} = 1$$

aber wenn die W Coefficienten vor $W_n^{n,m}$ schon unmerklich werden, so rechnet man am Zweckmässigsten für den höchsten Werth von i , den man braucht, θ_i aus folgendem Kettenbruch

$$\theta_i = \frac{i+2m \sin^2 \frac{1}{2}\varphi}{i} \cdot \frac{\sec^2 \frac{1}{2}\varphi}{1+\alpha_i} \cdot \frac{1+\beta_i}{1+\text{etc.}}$$

wo

$$\alpha_i = \frac{(n+m)(n-m+1)}{i(i+1)} \beta^2; \quad \beta_i = \frac{(n-m-i)(n+m+i+1)}{(i+1)(i+2)} \beta^2$$

$$\gamma_i = \frac{(n+m+1)(n-m+2)}{(i+2)(i+3)} \beta^2; \quad \delta_i = \frac{(n-m-i-1)(n+m+i+2)}{(i+3)(i+4)} \beta^2$$

etc.

etc.

46.

Für die übrigen Coefficienten setze man, von $i=1$ bis $i=n+m$,

$$\frac{W_{m-i}^{n,m}}{W_{m-i+1}^{n,m}} = q_i; \quad q_i = -G_i \zeta_i$$

$$G_i = \frac{n+m-i+1}{i-2m \sin^2 \frac{1}{2} \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{2}$$

$$k_i = G_i \frac{n-m+i}{i-1-2m \sin^2 \frac{1}{2} \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{2}$$

dann wird

$$\zeta_{i-1} = \frac{1}{1+k_i \zeta_i}; \quad \zeta_{i-2} = \frac{1}{1+k_{i-1} \zeta_{i-1}}, \quad \text{etc.}$$

$$W_{m-i}^{n,m} = W_m^{n,m} q_1 q_2 q_3 \dots q_i$$

Der Anfangswerth ist wieder $\zeta_{n+m} = 1$, und wo dieser nicht gebraucht wird,

$$\zeta_i = \frac{i-2m \sin^2 \frac{1}{2} \varphi}{i} \cdot \frac{\sec^2 \frac{1}{2} \varphi}{\frac{1+\alpha_i}{1+\beta_i} \frac{1+\beta_i}{1+\text{etc.}}}$$

wo

$$\alpha_i = \frac{(n-m)(n+m+1)}{i(i+1)} \beta^2,$$

$$\beta_i = \frac{(n-m+i+1)(n+m-i)}{(i+1)(i+2)} \beta^2$$

$$\gamma_i^1 = \frac{(n-m-1)(n+m+2)}{(i+2)(i+3)} \beta^2,$$

$$\delta_i = \frac{(n-m+i+2)(n+m-i-1)}{(i+3)(i+4)} \beta^2$$

etc.

etc.

47.

Es wird, um die vorhergehenden Rechnungen auszuführen, wieder nur $W_m^{n,m}$ gebraucht; ich werde aber, wie vorher, so auch hier etwas weiter gehen. Die Ausdrücke des Art. 43 zeigen sogleich, dass

$$W_{m+i}^{n,m} = (-1)^i \cos^{2n} \frac{1}{2} \varphi \frac{n-m \cdot n-m-1 \dots n-m-i+1}{1 \cdot 2 \dots i} \beta^i F(-n-m, -n+m+i, i+1, \beta^2)$$

$$W_{m-i}^{n,m} = (-1)^i \cos^{2n} \frac{1}{2} \varphi \frac{n+m \cdot n+m-1 \dots n+m-i+1}{1 \cdot 2 \dots i} \beta^i F(-n+m, -n-m+i, i+1, \beta^2)$$

und der daraus folgende Werth von $W_m^{n,m}$ kann, wenn β klein ist, oder allgemein wenn $n-m$ klein ist, zur Berechnung angewandt werden. Dieser ist aber der a. a. O. gegebene Ausdruck, nemlich

$$W_m^{n,m} = \cos^{2n} \frac{1}{2} \varphi \left\{ 1 + \frac{n^2-m^2}{1^2} \beta^2 + \frac{n^2-m^2 \cdot (n-1)^2-m^2}{1^2 \cdot 2^2} \beta^4 + \text{etc.} \right\}$$

Ich werde nun $\beta = \sin k$ setzen, und die von $\cos k$ abhängigen Ausdrücke suchen. Durch die Gleichung (21) bekommen wir sogleich

$$F(-n-m, -n+m+i, i+1, \beta^2) = c F(-n-m, -n+m+i, -2n, \cos^2 k)$$

Wenn $m < n$ ist, so kann der Ausdruck rechter Hand nie unendlich werden, obgleich das dritte Element eine ganze negative Zahl ist, denn er bricht stets vor dem Gliede ab, welches die Null zum Nenner bekommen

würde. Bestimmt man nun die Constante c wie oben gezeigt worden ist, so wird

$$c = \frac{n+m+i+1 \cdot n+m+i+2 \dots 2n}{i+1 \cdot i+2 \dots n-m}$$

und hiemit erhält man

$$W_{m+i}^{n,m} = (-1)^i \cos^{2n} \frac{1}{2} \varphi \frac{n+m+i+1 \cdot n+m+i+2 \dots 2n}{1 \cdot 2 \dots n-m-i} \beta^i F(-n-m, -n+m+i, -2n, \cos^2 k)$$

Um den Ausdruck der übrigen Coefficienten zu erhalten, braucht man hierin nur $-m$ statt m zu schreiben. Also

$$W_{m-i}^{n,m} = (-1)^i \cos^{2n} \frac{1}{2} \varphi \frac{n-m+i+1 \cdot n-m+i+2 \dots 2n}{1 \cdot 2 \dots n+m-i} \beta^i F(-n+m, -n-m+i, -2n, \cos^2 k)$$

beide Ausdrücke geben übereinstimmend

$$W_m^{n,m} = \cos^{2n} \frac{1}{2} \varphi \frac{n+m+1 \cdot n+m+2 \dots 2n}{1 \cdot 2 \dots n-m} \left\{ 1 - \frac{n^2-m^2}{4 \cdot 2n} \cos^2 k + \frac{n^2-m^2 \cdot (n-1)^2-m^2}{4 \cdot 2 \cdot 2n \cdot 2n-4} \cos^4 k \mp \text{etc.} \right\}$$

48.

Stellt man $W_m^{n,m}$ durch eine Differentialgleichung dar, so erhält man

$$\frac{d^2 W_m^{n,m}}{dk^2} + \frac{1+4n \sin^2 k}{\sin k \cos k} \frac{dW_m^{n,m}}{dk} - 4(n^2-m^2) W_m^{n,m} = 0$$

und aus dieser kann man auf die Art, welche in den vorhergehenden Paragraphen dargelegt worden ist, $W_m^{n,m}$ durch eine halbconvergirende Reihe darstellen. Allein wenn nicht bloß n , sondern auch m eine grosse Zahl ist, so wird diese Reihe nur sehr beschränkter, oder gar keiner Anwendung fähig sein, da die Potenzen von m im Zähler vorkommen. Ich werde indess ein Verfahren andeuten, durch welches man den Ausdruck von $W_m^{n,m}$ von denselben oben entwickelten halbconvergirenden Reihen abhängig machen kann. Durch Hülfe der Relationen zwischen denjenigen F Functionen, die *Gauss Functiones contiguae* nennt, kann man zwischen beliebigen drei F Functionen, deren Elemente um ganze Zahlen von einander verschieden sind, eine linearische Gleichung entwickeln, und da nun m hier eine ganze Zahl ist, so lässt sich eine Gleichung der folgenden Form ableiten,

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z^2) = A F(\alpha+m, \beta-m, \gamma, z^2) + B F(\alpha+m-1, \beta-m-1, \gamma, z^2)$$

wo A und B im Allgemeinen rationale Brüche in Bezug auf z^2 sind. Für $W_m^{n,m}$ ist nun dem Vorhergehenden zufolge

$$\alpha = -n-m, \beta = -n+m, \gamma = 1, z = \sin k$$

also wird für diesen Fall die vorstehende Gleichung

$$F(-n-m, -n+m, 1, \sin^2 k) =$$

$$AF(-n, -n, 1, \sin^2 k) + BF(-n-1, -n-1, 1, \sin^2 k)$$

die erste der F Functionen rechter Hand ist aber die, die im § I in eine halbconvergirende Reihe verwandelt wurde, und die zweite F Function entspringt aus jener durch Verwandelung von n in $n+1$. Auf dieselbe Art könnte man auch $W_m^{n,m}$ von

$$F(-m, m, 1, \sin^2 k) \text{ und } F(-m-1, m+1, 1, \sin^2 k)$$

abhängig machen, wodurch man auf die halbconvergirende Reihe des § II hingeführt würde. Ich muss mich indess hier begnügen, dieses Verfahren bloß anzudeuten.

§ IV.

Entwicklung der Cosinusse und Sinusse der Vielfachen der excentrischen Anomalie in Reihen, die nach den Cosinussen und Sinussen der mittleren Anomalie fortschreiten, und umgekehrt.

49.

Sei ε die excentrische und g die mittlere Anomalie, und bez. y und z die dazu gehörigen imaginären Exponentialfunctionen, nemlich

$$y = c^{\varepsilon\sqrt{-1}}, \quad z = c^{g\sqrt{-1}}$$

wo wie früher c die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet. Die Coefficienten der zu entwickelnden Reihen bezeichne ich mit $P_h^{(i)}$ und $Q_i^{(h)}$, so dass

$$y^i = \sum_{-\infty}^{+\infty} P_h^{(i)} z^h$$

$$z^h = \sum_{-\infty}^{+\infty} Q_i^{(h)} y^i$$

Nehmen wir nun an, dass h und i ganze Zahlen sind, so ist zufolge des im Art. 20 bewiesenen Satzes, und weil hier augenscheinlich $Q_{-i}^{(h)} = Q_i^{(h)}$ ist,

$$P_h^{(i)} = \frac{i}{h} Q_i^{(h)}$$

wo aber der Werth $h = 0$ eine Ausnahme macht. Es sind gleichfalls alle P und Q Coefficienten kleiner wie Eins, mit Ausnahme des im Art. 19 genannten Falles.

50.

Der Ausdruck des vor. Art. für z giebt auf dieselbe Art wie der allgemeine Ausdruck zu Anfang des § II,

$$(50) \quad Q_i^{(h)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c-\pi\sqrt{-1}}^{c+\pi\sqrt{-1}} z^h y^{-i-1} dy$$

aber aus der Relation zwischen der excentrischen und der mittleren Anomalie, nemlich aus

$$g = \varepsilon - e \sin \varepsilon$$

zieht man

$$(51) \quad z = y c^{-\frac{e}{2}(y-\frac{1}{y})}$$

und hiemit geht das vorstehende Integral über in

$$(52) \quad Q_i^{(h)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c-\pi\sqrt{-1}}^{c+\pi\sqrt{-1}} y^{h-i-1} c^{-\frac{he}{2}(y-\frac{1}{y})} dy$$

Sei nun überhaupt

$$(53) \quad c^{\lambda(y-\frac{1}{y})} = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_{\lambda}^{(m)} y^m$$

dann kann man sich durch die Entwicklung leicht überzeugen, dass

$$J_{\lambda}^{(-m)} = (-1)^m J_{\lambda}^{(m)}$$

$$J_{-\lambda}^{(m)} = (-1)^m J_{\lambda}^{(m)}$$

$$J_{-\lambda}^{(-m)} = J_{\lambda}^{(m)}$$

Die Substitution des Ausdrucks (53) verwandelt den (50) in

$$Q_i^{(h)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{-\infty}^{+\infty} J_{\frac{he}{2}}^{(m)} \int_{c-\pi\sqrt{-1}}^{c+\pi\sqrt{-1}} y^{h-i-m-1} dy$$

Da nun, wenn p eine ganze Zahl bedeutet,

$$(54) \quad \begin{cases} \int_{c-\pi\sqrt{-1}}^{c+\pi\sqrt{-1}} y^p dy = 0 \\ \int_{c-\pi\sqrt{-1}}^{c+\pi\sqrt{-1}} \frac{dy}{y} = 2\pi\sqrt{-1} \end{cases}$$

ausgenommen

so giebt der vorstehende Ausdruck sogleich $h-i-m=0$, und also

$$(55) \quad Q_i^{(h)} = J_{\frac{he}{2}}^{(h-i)}$$

und hieraus ergibt sich zufolge des vor. Art.

$$(56) \quad P_h^{(i)} = \frac{i}{h} J_{\frac{he}{2}}^{(h-i)}$$

wo aber $h=0$ eine Ausnahme bildet.

Dieses Resultat ist in reeller Form schon von *Jacobi* in *Crelle's Journal* Bd. XV gegeben, aber auf ganz andere Art bewiesen, und der Ausnahmefall nicht berücksichtigt.

51.

Um $P_0^{(i)}$ zu erhalten, wende ich die Gleichung

$$P_0^{(i)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c-\pi\sqrt{-1}}^{c+\pi\sqrt{-1}} y^i \frac{dz}{z}$$

an, die aus dem Ausdruck für z^h des Art. 49 folgt. Die Gleichung (51) giebt durch die Differentiation

$$\frac{dz}{z} = \frac{dy}{y} - \frac{e}{2} \left(1 + \frac{1}{y^2}\right) dy \quad (57)$$

womit die vorstehende übergeht in

$$P_0^{(i)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c-\pi\sqrt{-1}}^{c+\pi\sqrt{-1}} (y^{i-1} - \frac{e}{2} y^i - \frac{e}{2} y^{i-2}) dy.$$

Durch Anwendung des Satzes (54) findet man sogleich, dass dieses Integral im Allgemeinen gleich Null ist, die Fälle $i=0$, $i=1$, $i=-1$ ausgenommen. In diesen wird

$$P_0^{(0)} = 1$$

$$P_0^{(1)} = P_0^{(-1)} = -\frac{1}{2}e$$

für alle übrigen Werthe von i ist also

$$P_0^{(i)} = 0$$

52.

Von den hier mit $J_\lambda^{(m)}$ bezeichneten Functionen sind mehrere Tafeln vorhanden; ich habe eine in den »Absoluten Störungen etc.« gegeben. Die Gleichung (53) giebt übrigens leicht, wenn m stets als positive und ganze Zahl betrachtet wird,

$$J_\lambda^{(m)} = \frac{\lambda^m}{1.2\dots m} \left\{ 1 - \frac{\lambda^2}{1.m+1} + \frac{\lambda^4}{1.2.m+1.m+2} - \frac{\lambda^6}{1.2.3.m+1.m+2.m+3} \pm \text{etc.} \right\}$$

welche Reihe für jeden Werth von λ und m convergirt. Die bequemste und sicherste Art der Berechnung einer Reihe dieser Functionen ist die, dass man eben so, wie in den vor. §§ gezeigt wurde, das Verhältniss

von $J_\lambda^{(m+1)}$ zu $J_\lambda^{(m)}$ durch Hülfe eines Kettenbruches berechnet, und schliesslich daraus und durch $J_\lambda^{(0)}$ die Functionen selbst. Es dient dazu der erste der beiden Kettenbrüche, die ich a. a. O. gegeben habe, nachdem darin $i^1 \nu = 0$ gesetzt worden. *) Setzt man nemlich

$$p_i = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \frac{1}{i+1} - \frac{1}{\lambda} \frac{1}{i+2} - \text{etc.}$$

wo die Null der Grenzwert der Glieder ist, so wird

$$J_\lambda^{(m)} = J_\lambda^{(0)} p_1 p_2 \dots p_m$$

Wenn λ eine grosse Zahl ist, so kann man $J_\lambda^{(0)}$ durch die halbconvergirende Reihe, die ich a. a. O. entwickelt habe, mit weit geringerer Mühe berechnen, wie aus der oben angeführten, die stets convergirt.

Ich bemerke noch, dass diese J Functionen in die Kategorie der hypergeometrischen Reihen gehören, die in den vorigen §§ vorkamen. Man findet leicht

$$J_\lambda^{(m)} = \frac{\lambda^m}{1.2\dots m} F\left(\nu, \nu, m+1, -\frac{\lambda^2}{\nu^2}\right)$$

wo ν eine unendlich grosse Zahl ist.

53.

Man kann $P_h^{(i)}$ und $Q_i^{(h)}$ auch durch andere Functionen ausdrücken, die in die Klasse derjenigen gehören, wovon ich in den folgenden §§ einen ausschliesslichen Gebrauch machen werde, und die man früher nicht gekannt zu haben scheint. Die Differentialgleichung (57) lässt sich wie folgt schreiben,

$$\frac{dz}{z} = \frac{dy}{y} \left(1 - \beta y\right) \left(1 - \frac{\beta}{y}\right) \cos^2 \frac{1}{2} \varphi$$

wo wie früher

$$\beta = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi$$

ist. Substituirt man diese nebst (54) in die Gleichung

$$P_h^{(i)} = \frac{1}{2\pi \sqrt{-1}} \int_{c-\pi \sqrt{-1}}^{c+\pi \sqrt{-1}} y^i z^{-h-1} dz$$

*) Es lässt sich leicht zeigen, dass die a. a. O. gegebenen Integrationsfactoren als J Functionen definirt werden können, in welchen der obere Index keine ganze Zahl ist, wie er seiner ursprünglichen Bedeutung nach sein muss.

so entsteht

$$P_h^{(i)} = \frac{\cos^2 \frac{1}{2} \varphi}{2\pi r-1} \int_{c^{-\pi r-1}}^{c^{+\pi r-1}} y^{i-h-1} (1-\beta y) \left(1-\frac{\beta}{y}\right) c^{\mu\beta(y-y^{-1})} dy$$

wo

$$\mu = h \cos^2 \frac{1}{2} \varphi$$

ist. Der Coefficient von dy unter dem Integralzeichen lässt sich in folgende drei Factoren zerlegen,

$$y^{i-h-1}; \quad (1-\beta y) c^{\mu\beta y}; \quad (1-\beta y^{-1}) c^{-\mu\beta y^{-1}}$$

von welchen der dritte aus dem zweiten entsteht, wenn man darin

$$\mu \text{ in } -\mu, \text{ und } y \text{ in } y^{-1}$$

verwandelt. Es ist aber

$$\begin{aligned} (1-\beta y) c^{\mu\beta y} &= (1-\beta y) \left\{ 1 + \mu\beta y + \frac{\mu^2}{2} \beta^2 y^2 + \frac{\mu^3}{2 \cdot 3} \beta^3 y^3 + \text{etc.} \right\} \\ &= 1 - \beta y \\ &\quad + \mu\beta y - \mu\beta^2 y^2 \\ &\quad + \frac{\mu^2}{2} \beta^2 y^2 - \frac{\mu^2}{2} \beta^3 y^3 \\ &\quad + \frac{\mu^3}{2 \cdot 3} \beta^3 y^3 - \text{etc.} \end{aligned}$$

Setzt man daher

$$A_1 = -1 + \mu$$

$$B_1 = 1 + \mu$$

$$A_2 = -\mu + \frac{\mu^2}{2}$$

$$B_2 = \mu + \frac{\mu^2}{2}$$

$$A_3 = -\frac{\mu^2}{2} + \frac{\mu^3}{2 \cdot 3}$$

$$B_3 = \frac{\mu^2}{2} + \frac{\mu^3}{2 \cdot 3}$$

etc.

etc.

$$A_k = -\frac{\mu^{k-1}}{2 \cdot 3 \dots k-1} \left(1 - \frac{\mu}{k}\right),$$

$$B_l = \frac{\mu^{l-1}}{2 \cdot 3 \dots l-1} \left(1 + \frac{\mu}{l}\right)$$

etc.

etc.

so wird

$$(1-\beta y) c^{\mu\beta y} = 1 + A_1 \beta y + A_2 \beta^2 y^2 + A_3 \beta^3 y^3 + \text{etc.}$$

$$(1-\beta y^{-1}) c^{-\mu\beta y^{-1}} = 1 - B_1 \frac{\beta}{y} + B_2 \frac{\beta^2}{y^2} - B_3 \frac{\beta^3}{y^3} \pm \text{etc.}$$

und der eben angeführte Coefficient von dy unter dem Integralzeichen wird

$$\begin{aligned} &= \sum_0^\infty y^{i-h+k-1} \{A_k \beta^k - A_{k+1} B_1 \beta^{k+2} + A_{k+2} B_2 \beta^{k+4} \mp \text{etc.}\} \\ &+ \sum_1^\infty (-1)^l y^{i-h-l-1} \{B_l \beta^l - B_{l+1} A_1 \beta^{l+2} + B_{l+2} A_2 \beta^{l+4} \mp \text{etc.}\} \end{aligned}$$

Zufolge des Satzes (54) bekommt man hieraus sogleich

1) wenn $h-i$ positiv ist,

$$P_h^{(i)} = \cos^2 \frac{1}{2} \varphi \{A_{h-i} \beta^{h-i} - A_{h-i+1} B_1 \beta^{h-i+2} + A_{h-i+2} B_2 \beta^{h-i+4} \mp \text{etc.}\}$$

2) wenn $i - h$ positiv ist,

$$P_h^{(i)} = (-1)^{i-h} \cos^2 \frac{1}{2} \varphi \{ B_{i-h} \beta^{i-h} - B_{i-h+1} A_1 \beta^{i-h+2} + B_{i-h+2} A_2 \beta^{i-h+4} \mp \text{etc.} \}$$

für $i = h$ sind beide Ausdrücke gleichbedeutend, und die oben bei den P Coefficienten gefundenen Ausnahmefälle sind hier in der allgemeinen Form enthalten. Durch Hülfe der Gleichung

$$Q_i^{(h)} = \frac{h}{i} P_h^{(i)}$$

bringt man die Q Coefficienten auf dieselbe Form, wo aber $i = 0$ einen Ausnahmefall bildet, in welchem der Werth von $Q_0^{(h)}$, welcher aus (55) folgt, stets angewandt werden muss.

Die Vergleichung der vorstehenden Ausdrücke für $P_h^{(i)}$ mit (56) giebt neue Ausdrücke für die J Functionen, die noch nirgends gegeben worden sind.

Es lassen sich noch mehr analoge Formen aufstellen, die ich aber weglasse, weil sie minder einfach sind, wie die obige, und ihre Ableitung dem Inhalt der folgenden §§ leicht entnommen werden kann.

54.

Um eine Relation zwischen drei P oder Q Coefficienten abzuleiten, gehe ich von der identischen Gleichung

$$d \cdot z^h = h z^h \frac{dz}{z}$$

aus. Substituirt man hierin für $\frac{dz}{z}$ seinen Werth aus (57), so bekommt man

$$\frac{d \cdot z^h}{dy} = h \frac{z^h}{y} - \frac{he}{2} z^h - \frac{he}{2} \frac{z^h}{y^2}$$

woraus vermittelt der Gleichungen

$$z^h = \sum Q_i^{(h)} y^i, \quad \frac{d \cdot z^h}{dy} = \sum i Q_i^{(h)} y^{i-1}$$

die folgende

$$0 = he Q_i^{(h)} - 2(h-i-1) Q_{i+1}^{(h)} + he Q_{i+2}^{(h)}$$

sogleich hervorgeht. Durch Anwendung der Gleichung

$$Q_i^{(h)} = \frac{h}{i} P_h^{(i)}$$

bekommt man hieraus

$$0 = \frac{he}{i} P_h^{(i)} - 2 \frac{h-i-1}{i+1} P_h^{(i+1)} + \frac{he}{i+2} P_h^{(i+2)}$$

welche jedoch für $i = 0$ ihre Geltung verliert.

§ V.

Entwicklung der Cosinusse und Sinusse der Vielfachen der wahren Anomalien in Reihen, die nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen der mittleren Anomalie fortschreiten, und umgekehrt.

55.

Diese Aufgabe lässt sich erstlich aus dem Inhalt der § II und IV lösen. Dort hatten wir nemlich, wenn wir wieder die zur wahren, excentrischen und mittleren Anomalie gehörigen, imaginären Exponentialfunctionen bez. mit x , y und z bezeichnen,

$$x^\mu = \sum R_i^{(\mu)} y^i$$

$$y^i = \sum P_h^{(i)} z^h$$

Multiplicirt man diese beiden Reihen mit einander, so bekommt man

$$x^\mu = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_h^{(\mu)} z^h$$

wo

$$C_h^{(\mu)} = R_0^{(\mu)} P_h^{(0)} + R_1^{(\mu)} P_h^{(1)} + R_2^{(\mu)} P_h^{(2)} + R_3^{(\mu)} P_h^{(3)} + \text{etc.}$$

Dieser Coefficient besteht also aus einer unendlichen Reihe von Producten, deren jedes aus zwei Factoren besteht. Dieses ist in der That die Form, die alle vorhergehenden Entwicklungen haben, die ich in jedem § aus dem Product zweier Factoren abgeleitet habe. In fast allen vorhergehenden Fällen bestand jeder der beiden Factoren eines jeden Gliedes der Coefficienten aus einem einzigen Gliede, und ich habe daher den Coefficienten selbst sogleich mit Einem Buchstaben bezeichnet. Nur in der, der vorstehenden analogen, Entwicklung des Art. 42 und in der Entwicklung des vorletzten Art. des vor. § bestand jeder Factor aus mehr wie Einem Gliede, weshalb der Coefficient zuletzt unter einer der obigen analogen Form dargestellt wurde.

Die beiden Factoren eines jeden Gliedes der Coefficienten können auf mannigfaltige Weise dargestellt und verändert werden, wie man im Vorhergehenden gesehen hat; es giebt aber ausser diesen eine neue Art, und zwar diejenige, wovon ich im vorletzten Art. des vor. § ein Beispiel gegeben habe, die ein neues Licht auf die Entwicklungen der Functionen des Radius Vectors und der Anomalien nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen der mittleren Anomalien wirft, indem sie diese Entwicklungen auf einen bisher noch nicht gekannten Grad von Einfachheit und Regelmässigkeit hinführt.

Auch diese neue Form ist, während sie im Ganzen dieselbe bleibt, in ihren einzelnen Theilen vielfacher Abänderungen fähig, von welchen ich im Folgenden nur die zunächst liegenden entwickeln werde.

56.

Sei wie oben

$$x^\mu = \sum C_i^{(\mu)} z^i$$

und dem entgegengesetzt

$$z^i = \sum D_\mu^{(i)} x^\mu$$

Da die Differenz zwischen der wahren und mittleren Anomalie eine solche periodische Function ist, wie im Art. 17 allgemein angenommen wurde, so finden hier die Sätze der Artt. 19 und 20 statt. Es sind also alle C und D Coefficienten kleiner wie Eins, mit Ausnahme des dort bezeichneten Falles, in welchem sie gleich Eins werden. Da ferner hier augenscheinlich

$$C_{-i}^{(-\mu)} = C_i^{(\mu)} \text{ und } D_{-\mu}^{(-i)} = D_\mu^{(i)}$$

ist, so wird

$$D_\mu^{(i)} = \frac{i}{\mu} C_i^{(\mu)}$$

oder

$$C_i^{(\mu)} = \frac{\mu}{i} D_\mu^{(i)}$$

57.

Die D Coefficienten kann man erstlich ohne Integrationen finden. Es ist dem Vorhergehenden zufolge

$$z = y c^{-\frac{e}{2} \{y - \frac{1}{y}\}}$$

$$y = x \frac{1 + \frac{\beta}{x}}{1 + \beta x}$$

wo wieder $\beta = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi$ ist. Hieraus bekommt man

$$z^i = x^i \frac{\left(1 + \frac{\beta}{x}\right)^i}{(1 + \beta x)^i} c^{-\frac{ie}{2} \left\{ \frac{x+\beta}{1+\beta x} - \frac{1+\beta x}{x+\beta} \right\}}$$

Um die Entwicklung dieser Function auf eine regelmässige Form hinzuführen, bemerke ich dass

$$(58) \quad \frac{x+\beta}{1+\beta x} = \beta + (1 - \beta^2) \frac{x}{1+\beta x}; \quad \frac{1+\beta x}{x+\beta} = \beta + (1 - \beta^2) \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{\beta}{x}}$$

Substituirt man diese in dem Exponenten der vorstehenden Gleichung, so wird

$$z^i = x^i (1 + \beta x)^{-i} (1 + \beta x^{-1})^i c^{m\beta \left\{ \frac{x^{-1}}{1 + \beta x^{-1}} - \frac{x}{1 + \beta x} \right\}}$$

wo

$$m = \frac{ie(1 - \beta^2)}{2\beta} = i \cos \varphi$$

gesetzt ist. Die rechte Seite dieser Gleichung lässt sich in drei Factoren zerlegen, nemlich in

$$x^i; \quad (1 + \beta x)^{-i} c^{-\frac{m\beta x}{1 + \beta x}}; \quad (1 + \beta x^{-1})^i c^{\frac{m\beta x^{-1}}{1 + \beta x^{-1}}}$$

wovon der dritte aus dem zweiten entsteht, wenn man darin $-i$ statt i , $-m$ statt m , und x^{-1} statt x schreibt. Es ist nun

$$\begin{aligned} (1 + \beta x)^{-i} c^{-\frac{m\beta x}{1 + \beta x}} &= (1 + \beta x)^{-i} - (1 + \beta x)^{-i-1} m\beta x + (1 + \beta x)^{-i-2} \frac{m^2}{2} \beta^2 x^2 \pm \text{etc.} \\ &= 1 - \frac{i}{1} \beta x + \frac{i \cdot i + 1}{1 \cdot 2} \beta^2 x^2 - \frac{i \cdot i + 1 \cdot i + 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \beta^3 x^3 \pm \text{etc.} \\ &\quad - m\beta x + m \frac{i+1}{1} \beta^2 x^2 - m \frac{i+1 \cdot i+2}{1 \cdot 2} \beta^3 x^3 \pm \text{etc.} \\ &\quad + \frac{m^2}{2} \beta^2 x^2 - \frac{m^2}{2} \frac{i+2}{1} \beta^3 x^3 \pm \text{etc.} \\ &\quad - \frac{m^3}{2 \cdot 3} \beta^3 x^3 \pm \text{etc.} \\ &\quad \pm \text{etc.} \end{aligned}$$

Setzt man daher

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{i}{1} + m$$

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{i \cdot i + 1}{1 \cdot 2} + \frac{i+1}{1} m + \frac{m^2}{2}$$

$$\mathfrak{M}_3 = \frac{i \cdot i + 1 \cdot i + 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{i+1 \cdot i+2}{1 \cdot 2} m + \frac{i+2}{1} \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{2 \cdot 3}$$

etc.

etc.

$$\mathfrak{N}_1 = \frac{i}{1} + m$$

$$\mathfrak{N}_2 = \frac{i \cdot i - 1}{1 \cdot 2} + \frac{i-1}{1} m + \frac{m^2}{2}$$

$$\mathfrak{N}_3 = \frac{i \cdot i - 1 \cdot i - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{i-1 \cdot i-2}{1 \cdot 2} m + \frac{i-2}{1} \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{2 \cdot 3}$$

etc.

etc.

so wird

$$(1 + \beta x)^{-i} c^{-\frac{m\beta x}{1 + \beta x}} = 1 - \mathfrak{M}_1 \beta x + \mathfrak{M}_2 \beta^2 x^2 - \mathfrak{M}_3 \beta^3 x^3 \pm \text{etc.}$$

$$(1 + \beta x^{-1})^i c^{\frac{m\beta x^{-1}}{1 + \beta x^{-1}}} = 1 + \mathfrak{N}_1 \frac{\beta}{x} + \mathfrak{N}_2 \frac{\beta^2}{x^2} + \mathfrak{N}_3 \frac{\beta^3}{x^3} + \text{etc.}$$

und hieraus folgt sogleich, wenn man $\mu = i \pm k$ setzt,

$$D_{i+k}^{(i)} = (-1)^k \{ \mathfrak{M}_k \beta^k - \mathfrak{M}_{k+1} \mathfrak{N}_1 \beta^{k+2} + \mathfrak{M}_{k+2} \mathfrak{N}_2 \beta^{k+4} \mp \text{etc.} \}$$

$$D_{i-k}^{(i)} = \{ \mathfrak{N}_k \beta^k - \mathfrak{N}_{k+1} \mathfrak{M}_1 \beta^{k+2} + \mathfrak{N}_{k+2} \mathfrak{M}_2 \beta^{k+4} \mp \text{etc.} \}$$

wo k nie negativ genommen werden darf. Für $k = 0$ gelten beide Formeln. Um die entsprechenden Ausdrücke für die entgegengesetzte Entwicklung zu erhalten, braucht man nur die vorstehenden der D Coefficienten in die Gleichung

$$C_i^{(\mu)} = \frac{\mu}{i} D_\mu^{(i)}$$

zu substituieren, in welcher aber $i = 0$ eine Ausnahme macht.

58.

Um andere Ausdrücke zu erhalten, bemerke ich dass

$$D_\mu^{(i)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c-\pi\sqrt{-1}}^{c+\pi\sqrt{-1}} z^i x^{-\mu-1} dx$$

Macht man in dieser die Grösse unter dem Integralzeichen durch die Gleichungen

$$z = yc^{-\frac{e}{2}} \left(y - \frac{1}{y} \right)$$

$$x = y \frac{1-\beta y^{-1}}{1-\beta y}$$

$$dx = \frac{1-\beta^2}{(1-\beta y)^2} dy$$

zur Function von y und dy , so wird

$$(59) \quad D_\mu^{(i)} = \frac{1-\beta^2}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c-\pi\sqrt{-1}}^{c+\pi\sqrt{-1}} y^{i-\mu-1} (1-\beta y)^{\mu-1} (1-\beta y^{-1})^{-\mu-1} c^{-n\beta(y-y^{-1})} dy$$

wo

$$n = i \cos^2 \frac{1}{2} \varphi$$

ist. Hier sind

$$y^{i-\mu-1}; \quad (1-\beta y)^{\mu-1} c^{-n\beta y}; \quad (1-\beta y^{-1})^{-\mu-1} c^{n\beta y^{-1}}$$

die drei Factoren, von welchen der letzte in den zweiten übergeht, wenn man darin $-\mu$ statt μ , $-n$ statt n , und y^{-1} statt y schreibt. Da nun

$$\begin{aligned} (1-\beta y)^{\mu-1} c^{-n\beta y} &= 1 - \frac{\mu-1}{1} \beta y + \frac{\mu-1 \cdot \mu-2}{1 \cdot 2} \beta^2 y^2 - \frac{\mu-1 \cdot \mu-2 \cdot \mu-3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \beta^3 y^3 \pm \text{etc.} \\ &\quad - n\beta y + n \frac{\mu-1}{1} \beta^2 y^2 - n \frac{\mu-1 \cdot \mu-2}{1 \cdot 2} \beta^3 y^3 \pm \text{etc.} \\ &\quad + \frac{n^2}{2} \beta^2 y^2 - \frac{n^2}{2} \frac{\mu-1}{1} \beta^3 y^3 \pm \text{etc.} \\ &\quad - \frac{n^3}{2 \cdot 3} \beta^3 y^3 \pm \text{etc.} \\ &\quad \pm \text{etc.} \end{aligned}$$

ist, so wird wenn man

$$P_1 = \frac{\mu-1}{1} + n$$

$$P_2 = \frac{\mu-1 \cdot \mu-2}{1 \cdot 2} + \frac{\mu-1}{1} n + \frac{n^2}{2}$$

$$P_3 = \frac{\mu-1 \cdot \mu-2 \cdot \mu-3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\mu-1 \cdot \mu-2}{1 \cdot 2} n + \frac{\mu-1}{1} \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{2 \cdot 3}$$

etc.

etc.

$$Q_1 = \frac{\mu+1}{1} + n$$

$$Q_2 = \frac{\mu+1 \cdot \mu+2}{1 \cdot 2} + \frac{\mu+1}{1} n + \frac{n^2}{2}$$

$$Q_3 = \frac{\mu+1 \cdot \mu+2 \cdot \mu+3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\mu+1 \cdot \mu+2}{1 \cdot 2} n + \frac{\mu+1}{1} \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{2 \cdot 3}$$

etc.

etc.

setzt,

$$(1-\beta y)^{\mu-1} c^{-n\beta y} = 1 - P_1 \beta x + P_2 \beta^2 x^2 - P_3 \beta^3 x^3 \pm \text{etc.}$$

$$(1-\beta y^{-1})^{-\mu-1} c^{n\beta y^{-1}} = 1 + Q_1 \frac{\beta}{x} + Q_2 \frac{\beta^2}{x^2} + Q_3 \frac{\beta^3}{x^3} + \text{etc.}$$

Der Coefficient von dy unter dem Integralzeichen wird hiemit

$$= \sum_0^\infty (-1)^p y^{i-\mu+p-1} \{ P_p \beta^p - P_{p+1} Q_1 \beta^{p+2} + P_{p+2} Q_2 \beta^{p+4} \mp \text{etc.} \}$$

$$+ \sum_1^\infty y^{i-\mu-q-1} \{ Q_q \beta^q - Q_{q+1} P_1 \beta^{q+2} + Q_{q+2} P_2 \beta^{q+4} \mp \text{etc.} \}$$

Hieraus folgt sogleich zufolge (54)

1) wenn $\mu-i$ positiv ist,

$$D_\mu^{(i)} = (-1)^{\mu-i} (1-\beta^2) \{ P_{\mu-i} \beta^{\mu-i} - P_{\mu-i+1} Q_1 \beta^{\mu-i+2} + P_{\mu-i+2} Q_2 \beta^{\mu-i+4} \mp \text{etc.} \}$$

2) wenn $i-\mu$ positiv ist,

$$D_\mu^{(i)} = (1-\beta^2) \{ Q_{i-\mu} \beta^{i-\mu} - Q_{i-\mu+1} P_1 \beta^{i-\mu+2} + Q_{i-\mu+2} P_2 \beta^{i-\mu+4} \mp \text{etc.} \}$$

Für $\mu = i$ gelten beide Formeln. Die Ausdrücke für $P_{\mu-i}$, $Q_{i-\mu}$, etc. bekommt man aus den obigen Ausdrücken für P_1 , Q_1 , etc. wie folgt

$$P_{\mu-i} = \frac{\mu-1 \cdot \mu-2 \dots i}{1 \cdot 2 \dots \mu-i} + \frac{\mu-1 \cdot \mu-2 \dots i+1}{1 \cdot 2 \dots \mu-i-1} n + \dots$$

$$\dots + \frac{\mu-1}{1} \frac{n^{\mu-i-1}}{2 \cdot 3 \dots \mu-i-1} + \frac{n^{\mu-i}}{2 \cdot 3 \dots \mu-i}$$

$$P_{\mu-i+1} = \frac{\mu-1 \cdot \mu-2 \dots i-1}{1 \cdot 2 \dots \mu-i+1} + \frac{\mu-1 \cdot \mu-2 \dots i}{1 \cdot 2 \dots \mu-i} n + \dots$$

$$\dots + \frac{\mu-1}{1} \frac{n^{\mu-i}}{2 \cdot 3 \dots \mu-i} + \frac{n^{\mu-i+1}}{2 \cdot 3 \dots \mu-i+1}$$

etc.

etc.

$$\begin{aligned}
Q_{i-\mu} &= \frac{\mu+1 \cdot \mu+2 \dots i}{1 \cdot 2 \dots i-\mu} + \frac{\mu+1 \cdot \mu+2 \dots i-1}{1 \cdot 2 \dots i-\mu-1} n + \dots \\
&\quad \dots + \frac{\mu+1}{1} \frac{n^{i-\mu-1}}{2 \cdot 3 \dots i-\mu-1} + \frac{n^{i-\mu}}{2 \cdot 3 \dots i-\mu} \\
Q_{i-\mu+1} &= \frac{\mu+1 \cdot \mu+2 \dots i+1}{1 \cdot 2 \dots i-\mu+1} + \frac{\mu+1 \cdot \mu+2 \dots i}{1 \cdot 2 \dots i-\mu} n + \dots \\
&\quad \dots + \frac{\mu+1}{1} \frac{n^{i-\mu}}{2 \cdot 3 \dots i-\mu} + \frac{n^{i-\mu+1}}{2 \cdot 3 \dots i-\mu+1} \\
&\quad \text{etc.} \qquad \qquad \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Durch Anwendung der Gleichung

$$C_i^{(\mu)} = \frac{\mu}{i} D_\mu^{(i)}$$

nehmen die C Coefficienten mit Ausnahme von $i = 0$ auch diese Form an.

59.

Durch eine kleine Veränderung des Exponenten von c in der Gleichung (59) kann man eine dritte Form zu Wege bringen. Addirt und subtrahirt man nemlich zu diesem Exponenten n , so wird

$$D_\mu^{(i)} = \frac{1-\beta^2}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c^{-n}\sqrt{-1}}^{c^{+n}\sqrt{-1}} y^{i-\mu-1} (1-\beta y)^{\mu-1} (1-\beta y^{-1})^{-\mu-1} c^{n(1-\beta y)} c^{-n(1-\beta y^{-1})} dy$$

wo die drei Factoren

$$y^{i-\mu-1}; \quad (1-\beta y)^{\mu-1} c^{n(1-\beta y)}; \quad (1-\beta y^{-1})^{-\mu-1} c^{-n(1-\beta y^{-1})}$$

sind. Auf dieselbe Art wie vorher findet man nun den Coefficienten von dy unter dem Integralzeichen

$$\begin{aligned}
&= \sum_0^\infty (-1)^p y^{i-\mu+p-1} \{ R_p S_0 \beta^p - R_{p+1} S_1 \beta^{p+2} + R_{p+2} S_2 \beta^{p+4} \mp \text{etc.} \} \\
&+ \sum_1^\infty y^{i-\mu-q-1} \{ S_q R_0 \beta^q - S_{q+1} R_1 \beta^{q+2} + S_{q+2} R_2 \beta^{q+4} \mp \text{etc.} \}
\end{aligned}$$

wo

$$R_0 = 1 + n + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{2 \cdot 3} + \text{etc.} = c^n$$

$$R_1 = \frac{\mu-1}{1} + \frac{\mu}{1} n + \frac{\mu+1}{1} \frac{n^2}{2} + \text{etc.}$$

$$R_2 = \frac{\mu-1 \cdot \mu-2}{1 \cdot 2} + \frac{\mu \cdot \mu-1}{1 \cdot 2} n + \frac{\mu+1 \cdot \mu}{1 \cdot 2} \frac{n^2}{2} + \text{etc.}$$

etc.

$$S_0 = 1 - n + \frac{n^2}{2} - \frac{n^3}{2 \cdot 3} \pm \text{etc.} = c^{-n}$$

$$S_1 = \frac{\mu+1}{1} - \frac{\mu}{1} n + \frac{\mu-1}{1} \frac{n^2}{2} \mp \text{etc.}$$

$$S_2 = \frac{\mu+1 \cdot \mu+2}{1 \cdot 2} - \frac{\mu \cdot \mu+1}{1 \cdot 2} n + \frac{\mu-1 \cdot \mu}{1 \cdot 2} \frac{n^2}{2} \mp \text{etc.}$$

etc.

Es wird daher

1) wenn $\mu - i$ positiv ist,

$$D_{\mu}^{(i)} = (-1)^{\mu-i} (1 - \beta^2) \{ R_{\mu-i} S_0 \beta^{\mu-i} - R_{\mu-i+1} S_1 \beta^{\mu-i+2} + R_{\mu-i+2} S_2 \beta^{\mu-i+4} - \text{etc.} \}$$

2) wenn $i - \mu$ positiv ist,

$$D_{\mu}^{(i)} = (1 - \beta^2) \{ S_{i-\mu} R_0 \beta^{i-\mu} - S_{i-\mu+1} R_1 \beta^{i-\mu+2} + S_{i-\mu+2} R_2 \beta^{i-\mu+4} - \text{etc.} \}$$

und vermöge der Gleichung

$$C_i^{(\mu)} = \frac{\mu}{i} D_{\mu}^{(i)}$$

nehmen die C Coefficienten, wieder mit Ausnahme von $i = 0$, auch diese Form an, welche sich unter andern von den beiden vorhergehenden Formen darin unterscheidet, dass die R und S unendliche Reihen sind, während in jenen die analogen Coefficienten endliche Ausdrücke sind.

60.

Es wären noch die Ausnahmefälle $C_0^{(\mu)}$ der vorhergehenden Analyse zu entwickeln, allein wenn wir statt dessen $C_i^{(\mu)}$ allgemein auf eine der vorhergehenden analoge Art behandeln, so werden wir auf noch drei andere Formen hingeführt, die auch die D Coefficienten, vermittelt der Gleichung

$$D_{\mu}^{(i)} = \frac{i}{\mu} C_i^{(\mu)}$$

jedoch mit Ausnahme von $\mu = 0$, annehmen.

Aus der Gleichung

$$x^{\mu} = \sum C_i^{(\mu)} z^i$$

ergiebt sich

$$C_i^{(\mu)} = \frac{1}{2\pi \sqrt{-1}} \int_{c-\pi \sqrt{-1}}^{c+\pi \sqrt{-1}} x^{\mu} z^{-i-1} dz \quad (60)$$

Die obigen Relationen zwischen x , y und z geben

$$\frac{dz}{z} = \frac{(1-\beta^2)^3}{1+\beta^2} (1+\beta x)^{-2} (1+\beta x^{-1})^{-2} \frac{dx}{x}$$

substituiert man diese, so wie

$$z = x (1+\beta x)^{-1} (1+\beta x^{-1}) c^{m\beta \left\{ \frac{x^{-1}}{1+\beta x^{-1}} - \frac{x}{1+\beta x} \right\}}$$

so wird

$$C_i^{(\mu)} = \frac{1}{2\pi \sqrt{-1}} \frac{(1-\beta^2)^3}{1+\beta^2} \int_{c-\pi \sqrt{-1}}^{c+\pi \sqrt{-1}} x^{\mu-i-1} (1+\beta x)^{i-2} (1+\beta x^{-1})^{-i-2} c^{m\beta \left\{ \frac{x}{1+\beta x} - \frac{x^{-1}}{1+\beta x^{-1}} \right\}} dx \quad (61)$$

wo wie oben $m = i \cos \varphi$ ist. Die drei Factoren sind hier

$$x^{\mu-i-1}; \quad (1+\beta x)^{i-2} c^{\frac{m\beta}{1+\beta x}}; \quad (1+\beta x^{-1})^{-i-2} c^{-\frac{m\beta}{1+\beta x^{-1}}}$$

Setzt man nun

$$T_1 = \frac{i-2}{1} + m$$

$$T_2 = \frac{i-2 \cdot i-3}{1 \cdot 2} + \frac{i-3}{1} m + \frac{m^2}{2}$$

etc.

$$T_k = \frac{i-2 \cdot i-3 \dots i-k-1}{1 \cdot 2 \dots k} + \frac{i-3 \cdot i-4 \dots i-k-1}{1 \cdot 2 \dots k-1} m + \dots + \frac{i-k-1}{1} \frac{m^{k-1}}{2 \cdot 3 \dots k-1} + \frac{m^k}{2 \cdot 3 \dots k}$$

etc.

$$U_1 = \frac{i+2}{1} + m$$

$$U_2 = \frac{i+2 \cdot i+3}{1 \cdot 2} + \frac{i+3}{1} m + \frac{m^2}{2}$$

etc.

$$U_l = \frac{i+2 \cdot i+3 \dots i+l+1}{1 \cdot 2 \dots l} + \frac{i+3 \cdot i+4 \dots i+l+1}{1 \cdot 2 \dots l-1} m + \dots + \frac{i+l+1}{1} \frac{m^{l-1}}{2 \cdot 3 \dots l-1} + \frac{m^l}{2 \cdot 3 \dots l}$$

etc.

dann wird der Coefficient von dx unter dem Integralzeichen

$$= \sum_0^\infty x^{\mu-i+k-1} \{T_k \beta^k - T_{k+1} U_1 \beta^{k+2} \pm \text{etc.}\} \\ + \sum_1^\infty (-1)^l x^{\mu-i-l-1} \{U_l \beta^l - U_{l+1} T_1 \beta^{l+2} \pm \text{etc.}\}$$

und hiemit

1) wenn $i - \mu$ positiv ist,

$$C_i^{(\mu)} = \frac{(1-\beta^2)^3}{1+\beta^2} \{T_{i-\mu} \beta^{i-\mu} - T_{i-\mu+1} U_1 \beta^{i-\mu+2} + T_{i-\mu+2} U_2 \beta^{i-\mu+4} \mp \text{etc.}\}$$

2) wenn $\mu - i$ positiv ist,

$$C_i^{(\mu)} = (-1)^{\mu-i} \frac{(1-\beta^2)^3}{1+\beta^2} \{U_{\mu-i} \beta^{\mu-i} - U_{\mu-i+1} T_1 \beta^{\mu-i+2} + U_{\mu-i+2} T_2 \beta^{\mu-i+4} \mp \text{etc.}\}$$

welches die vierte Form ist.

64.

Um eine fünfte Form zu erhalten, mache ich durch die Gleichungen

$$x = y \frac{1-\beta y^{-1}}{1-\beta y}$$

$$z = y c^{-\frac{e}{2}(y-y^{-1})}$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{dy}{y} (1-\beta y) (1-\beta y^{-1}) \cos^2 \frac{1}{2} \varphi$$

die Grösse unter dem Integralzeichen der Gleichung (60) zur Function von y und dy . Es kommt

$$C_i^{(\mu)} = \frac{\cos \frac{21}{2}\varphi}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c^{-\pi\sqrt{-1}}}^{c^{+\pi\sqrt{-1}}} y^{\mu-i-1} (1-\beta y)^{-\mu+1} (1-\beta y^{-1})^{\mu+1} c^{n\beta(y-y^{-1})} dy$$

wo wie oben $n = i \cos \frac{21}{2}\varphi$ ist. Die drei Factoren

$$y^{\mu-i-1}; \quad (1-\beta y)^{-\mu+1} c^{n\beta y}; \quad (1-\beta y^{-1})^{\mu+1} c^{-n\beta y^{-1}}$$

geben durch ähnliche Entwicklung wie oben den Coefficienten von dy unter dem Integralzeichen

$$= \sum_0^\infty y^{\mu-i+k-1} \{K_k \beta^k - K_{k+1} L_1 \beta^{k+2} \pm \text{etc.}\} \\ + \sum_1^\infty (-1)^l y^{\mu-i-l-1} \{L_l \beta^l - L_{l+1} K_1 \beta^{l+2} \pm \text{etc.}\}$$

wo

$$K_1 = \frac{\mu-1}{1} + n$$

$$K_2 = \frac{\mu-1 \cdot \mu}{1 \cdot 2} + \frac{\mu-1}{1} n + \frac{n^2}{2} \\ \text{etc.}$$

$$K_k = \frac{\mu-1 \cdot \mu \dots \mu+k-2}{1 \cdot 2 \dots k} + \frac{\mu-1 \cdot \mu \dots \mu+k-3}{1 \cdot 2 \dots k-1} n + \dots + \frac{\mu-1}{1} \frac{n^{k-1}}{2 \cdot 3 \dots k-1} + \frac{n^k}{2 \cdot 3 \dots k} \\ \text{etc.}$$

$$L_1 = \frac{\mu+1}{1} + n$$

$$L_2 = \frac{\mu+1 \cdot \mu}{1 \cdot 2} + \frac{\mu+1}{1} n + \frac{n^2}{2} \\ \text{etc.}$$

$$L_l = \frac{\mu+1 \cdot \mu \dots \mu-l+2}{1 \cdot 2 \dots l} + \frac{\mu+1 \cdot \mu \dots \mu-l+3}{1 \cdot 2 \dots l-1} n + \dots + \frac{\mu+1}{1} \frac{n^{l-1}}{2 \cdot 3 \dots l-1} + \frac{n^l}{2 \cdot 3 \dots l} \\ \text{etc.}$$

und hieraus ergibt sich

1) wenn $i - \mu$ positiv ist,

$$C_i^{(\mu)} = \cos \frac{21}{2}\varphi \{K_{i-\mu} \beta^{i-\mu} - K_{i-\mu+1} L_1 \beta^{i-\mu+2} + K_{i-\mu+2} L_2 \beta^{i-\mu+4} \mp \text{etc.}\}$$

2) wenn $\mu - i$ positiv ist,

$$C_i^{(\mu)} = (-1)^{\mu-i} \cos \frac{21}{2}\varphi \{L_{\mu-i} \beta^{\mu-i} - L_{\mu-i+1} K_1 \beta^{\mu-i+2} + L_{\mu-i+2} K_2 \beta^{\mu-i+4} \mp \text{etc.}\}$$

62.

Um eine sechste Form zu erhalten, füge ich wieder dem Exponenten von c die Grösse $n - n$ hinzu. Dadurch werden die drei Factoren unter dem Integralzeichen der Gleichung des vor. Art.

$$y^{\mu-i-1}; \quad (1-\beta y)^{-\mu+1} c^{-n(1-\beta y)}; \quad (1-\beta y^{-1})^{\mu+1} c^{n(1-\beta y^{-1})}$$

und der Coefficient von dy unter dem Integralzeichen

$$= \sum_0^\infty y^{\mu-i+k-1} \{ G_k H_0 \beta^k - G_{k+1} H_1 \beta^{k+2} \pm \text{etc.} \} \\ + \sum_1^\infty (-1)^l y^{\mu-i-l-1} \{ H_l G_0 \beta^l - H_{l+1} G_1 \beta^{l+2} \pm \text{etc.} \}$$

wo

$$G_0 = 1 - n + \frac{n^2}{2} \mp \text{etc.} = c^{-n}$$

$$G_1 = \frac{\mu-1}{1} - \frac{\mu-2}{1} n + \frac{\mu-3}{1} \frac{n^2}{2} \mp \text{etc.}$$

$$G_2 = \frac{\mu-1 \cdot \mu}{1 \cdot 2} - \frac{\mu-2 \cdot \mu-1}{1 \cdot 2} n + \frac{\mu-3 \cdot \mu-2}{1 \cdot 2} \frac{n^2}{2} \mp \text{etc.} \\ \text{etc.}$$

$$H_0 = 1 + n + \frac{n^2}{2} + \text{etc.} = c^n$$

$$H_1 = \frac{\mu+1}{1} + \frac{\mu+2}{1} n + \frac{\mu+3}{1} \frac{n^2}{2} + \text{etc.}$$

$$H_2 = \frac{\mu+1 \cdot \mu}{1 \cdot 2} + \frac{\mu+2 \cdot \mu+1}{1 \cdot 2} n + \frac{\mu+3 \cdot \mu+2}{1 \cdot 2} \frac{n^2}{2} + \text{etc.} \\ \text{etc.}$$

Es folgt hieraus

1) wenn $i - \mu$ positiv ist,

$$C_i^{(\mu)} = \cos^2 \frac{1}{2} \varphi \{ G_{i-\mu} H_0 \beta^{i-\mu} - G_{i-\mu+1} H_1 \beta^{i-\mu+2} + G_{i-\mu+2} H_2 \beta^{i-\mu+4} \pm \text{etc.} \}$$

2) wenn $\mu - i$ positiv ist,

$$C_i^{(\mu)} = (-1)^{\mu-i} \cos^2 \frac{1}{2} \varphi \{ H_{\mu-i} G_0 \beta^{\mu-i} - H_{\mu-i+1} G_1 \beta^{\mu-i+2} + H_{\mu-i+2} G_2 \beta^{\mu-i+4} \mp \text{etc.} \}$$

wo, wie in der dritten Form, die G und H Coefficienten unendliche Reihen sind.

Diese sechs Formen mögen hier gnügen, obgleich man noch mehrere geben könnte.

63.

Die Ausnahmefälle, die die Uebergangsformel

$$i C_i^{(\mu)} = \mu D_\mu^{(i)}$$

darbietet, verdienen eine besondere Betrachtung. Setzt man $i = k$ in dem Ausdruck für $D_{i-k}^{(i)}$ des Art. 57, so wird

$$D_0^{(i)} = \mathfrak{N}_i \beta^i - \mathfrak{N}_{i+1} \mathfrak{M}_1 \beta^{i+2} + \mathfrak{N}_{i+2} \mathfrak{M}_2 \beta^{i+4} \mp \text{etc.}$$

wo

$$\mathfrak{N}_i = 1 + m + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{2.3} + \dots + \frac{m^i}{2.3\dots i}$$

$$\mathfrak{N}_{i+1} = \frac{m^{i+1}}{2.3\dots i+1}$$

$$\mathfrak{N}_{i+2} = -\mathfrak{N}_{i+1} \left(1 - \frac{m}{i+2}\right)$$

$$\mathfrak{N}_{i+3} = \mathfrak{N}_{i+1} \left(1 - 2\frac{m}{i+2} + \frac{m^2}{i+2.i+3}\right)$$

etc.

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{i}{1} + m$$

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{i.i+1}{1.2} + \frac{i+1}{1}m + \frac{m^2}{2}$$

etc.

Setzt man $\mu = 0$ in dem zweiten Ausdruck für $D_\mu^{(i)}$ des Art. 58, so ergibt sich

$$D_0^{(i)} = (1 - \beta^2) \{ Q_i \beta^i - Q_{i+1} P_1 \beta^{i+2} + Q_{i+2} P_2 \beta^{i+4} \mp \text{etc.} \}$$

wo

$$Q_i = 1 + n + \frac{n^2}{2} + \dots + \frac{n^i}{2.3\dots i}$$

$$Q_{i+1} = Q_i + \frac{n^{i+1}}{2.3\dots i+1}$$

$$Q_{i+2} = Q_{i+1} + \frac{n^{i+2}}{2.3\dots i+2}$$

etc.

$$P_1 = -1 + n$$

$$P_2 = -P_1 + \frac{n^2}{2}$$

$$P_3 = -P_2 + \frac{n^3}{2.3}$$

etc.

Setzt man endlich $\mu = 0$ in dem zweiten Ausdruck für $D_\mu^{(i)}$ des Art. 59, so kommt

$$D_0^{(i)} = (1 - \beta^2) \{ S_i R_0 \beta^i - S_{i+1} R_1 \beta^{i+2} + S_{i+2} R_2 \beta^{i+4} \mp \text{etc.} \}$$

wo

$$S_i = 1 - (-1)^i \frac{n^{i+1}}{2.3\dots i+1} \left\{ 1 - \frac{i+1}{i+2}n + \frac{i+1}{i+3}\frac{n^2}{2} - \frac{i+1}{i+4}\frac{n^3}{2.3} \pm \text{etc.} \right\}$$

$$S_{i+1} = 1 - (-1)^{i+1} \frac{n^{i+2}}{2.3\dots i+2} \left\{ 1 - \frac{i+2}{i+3}n + \frac{i+2}{i+4}\frac{n^2}{2} - \frac{i+2}{i+5}\frac{n^3}{2.3} \pm \text{etc.} \right\}$$

etc.

$$R_0 = c^n$$

$$R_1 = -1 + \frac{n^2}{2} \left\{ 1 + \frac{2}{3}n + \frac{2}{4}\frac{n^2}{2} + \frac{2}{5}\frac{n^2}{2 \cdot 3} + \text{etc.} \right\}$$

$$R_2 = 1 + \frac{n^3}{2 \cdot 3} \left\{ 1 + \frac{3}{4}n + \frac{3}{5}\frac{n^2}{2} + \frac{3}{6}\frac{n^3}{2 \cdot 3} + \text{etc.} \right\}$$

etc.

Ich werde weiter unten auf diese Ausdrücke zurückkommen.

64.

Setzt man in den Ausdrücken für $C_i^{(\mu)}$ der Artt. 60, 61 und 62 $i=0$, so wird vor Allem

$$m=0, \quad n=0$$

und man bekommt

$$C_0^{(\mu)} = (-1)^\mu \frac{(1-\beta^2)^3}{1+\beta^2} \{ U_\mu \beta^\mu - U_{\mu+1} T_1 \beta^{\mu+1} + U_{\mu+2} T_2 \beta^{\mu+2} \mp \text{etc.} \}$$

wo

$$U_\mu = \mu + 1, \quad U_{\mu+1} = \mu + 2, \quad U_{\mu+2} = \mu + 3, \quad \text{etc.}$$

$$T_1 = -2, \quad T_2 = 3, \quad T_3 = -4, \quad \text{etc.}$$

$$C_0^{(\mu)} = (-1)^\mu \cos^2 \frac{1}{2} \varphi \{ L_\mu \beta^\mu - L_{\mu+1} K_1 \beta^{\mu+1} + L_{\mu+2} K_2 \beta^{\mu+2} \mp \text{etc.} \}$$

wo

$$L_\mu = \mu + 1, \quad L_{\mu+1} = 1, \quad L_{\mu+2} = 0, \quad \text{etc.}$$

$$K_1 = \mu - 1, \quad K_2 = \frac{1}{2}\mu(\mu - 1); \quad \text{etc.}$$

$$C_0^{(\mu)} = (-1)^\mu \cos^2 \frac{1}{2} \varphi \{ H_\mu G_0 \beta^\mu - H_{\mu+1} G_1 \beta^{\mu+1} + H_{\mu+2} G_2 \beta^{\mu+2} \mp \text{etc.} \}$$

wo

$$H_\mu = \mu + 1, \quad H_{\mu+1} = 1, \quad H_{\mu+2} = 0, \quad \text{etc.}$$

$$G_0 = 1, \quad G_1 = \mu - 1, \quad G_2 = \frac{1}{2}\mu(\mu - 1); \quad \text{etc.}$$

Die beiden letzten dieser Ausdrücke sind identisch, und geben für $C_0^{(\mu)}$ einen endlichen Ausdruck, welcher nach der Substitution der Factoren so steht

$$(62) \quad C_0^{(\mu)} = (-1)^\mu \beta^\mu \cos^2 \frac{1}{2} \varphi \{ \mu + 1 - (\mu - 1) \beta^2 \} = (-1)^\mu \beta^\mu (1 + \mu \cos \varphi)$$

Man kann diesen Ausdruck auch auf andere Art finden. Setzt man $i=0$ in die Gleichung (61), so wird

$$C_0^{(\mu)} = \frac{1}{2\pi \sqrt{-1}} \frac{(1-\beta^2)^3}{1+\beta^2} \int_{c-\pi \sqrt{-1}}^{c+\pi \sqrt{-1}} x^{\mu-1} (1+\beta x)^{-2} (1+\beta x^{-1})^{-2} dx$$

Aber zufolge des § I ist

$$\varrho = \frac{(1-\beta^2)^2}{1+\beta^2} (1+\beta x)^{-1} (1+\beta x^{-1})^{-1}$$

Substituirt man diesen Werth, so wird weil

$$\cos \varphi = \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}$$

ist,

$$C_0^{(\mu)} = \frac{1}{2\pi \sqrt{1-\cos \varphi}} \int_{c-\pi \sqrt{1-\cos \varphi}}^{c+\pi \sqrt{1-\cos \varphi}} \varrho^2 x^{\mu-1} dx$$

Diese Gleichung zeigt, dass $C_0^{(\mu)} \cos \varphi$ gleich dem Coefficienten von x^μ oder von $x^{-\mu}$ in der Entwicklung von ϱ^2 nach den Potenzen von x ist. Alle für diesen Coefficienten im § I entwickelten, verschiedenen Formen kann man also hier nach und nach substituiren. Diese Coefficienten wurden dort allgemein mit $V_{\pm i}^{(n)}$ bezeichnet, setzt man also darin $n=2$ und $\pm i = \mu$, so wird überhaupt

$$C_0^{(\mu)} = \frac{V_\mu^{(2)}}{\cos \varphi}$$

Um hieraus den oben gefundenen endlichen Ausdruck wieder zu erhalten, braucht man nur den Ausdruck (17) zu substituiren. Dieser wird in unserm Falle

$$V_\mu^{(2)} = (-1)^\mu (1+\mu) \beta^\mu \frac{\cos \varphi}{1+\beta^2} F(\mu-1, -1, \mu+1, \beta^2)$$

Schreibt man hierin die F Function aus, und substituirt in die vorhergehende Gleichung, so wird

$$C_0^{(\mu)} = (-1)^\mu \frac{\beta^\mu}{1+\beta^2} \{\mu+1 - (\mu-1) \beta^2\}$$

welche wegen $1+\beta^2 = \sec^2 \frac{1}{2} \varphi$ mit (62) identisch ist.

65.

Ausserdem will ich noch die Functionen

$$\cos \mu (\varepsilon - g) \text{ und } \sin \mu (\varepsilon - g),$$

wo μ eine beliebige Zahl ist, in Reihen entwickeln, die nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen der wahren Anomalie fortschreiten. Gehen wir zu den imaginären Exponentialfunctionen über, so kommen wir auf die Function $\left(\frac{y}{z}\right)^\mu$, die nach den ganzen Potenzen von x zu entwickeln ist. Sei daher

$$\left(\frac{y}{z}\right)^\mu = \sum_{-\infty}^{+\infty} E_i^{(\mu)} x^i$$

wo i nothwendiger Weise eine ganze Zahl ist. Die Gleichungen

$$z = y c^{-\frac{e}{2}(y-y^{-1})}$$

$$y = \frac{x+\beta}{1+\beta x}$$

geben hier

$$\frac{y}{z} = c^{\frac{e}{2} \left\{ \frac{x+\beta}{1+\beta x} - \frac{1+\beta x}{x+\beta} \right\}}$$

Erhebt man diese Gleichung Seite für Seite zur Potenz μ , und nimmt auf die Gleichungen (58) Rücksicht, so wird

$$\left(\frac{y}{z}\right)^\mu = c^{\frac{m\beta x}{1+\beta x}} \cdot c^{-\frac{m\beta x^{-1}}{1+\beta x^{-1}}}$$

wo $m = \mu \cos \varphi$ ist.

Behandelt man diese Gleichung eben so wie die vorhergehenden, und setzt

$$F_1 = m$$

$$F_2 = -m + \frac{m^2}{2}$$

$$F_3 = m - 2\frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{2.3}$$

etc.

$$G_1 = m$$

$$G_2 = m + \frac{m^2}{2}$$

$$G_3 = m + 2\frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{2.3}$$

etc.

so erhält man

1) für die positiven Werthe von i ,

$$E_i^{(\mu)} = F_i \beta^i - F_{i+1} G_1 \beta^{i+2} + F_{i+2} G_2 \beta^{i+4} \mp \text{etc.}$$

2) für die negativen Werthe von i ,

$$E_i^{(\mu)} = (-1)^i \{ G_i \beta^i - G_{i+1} F_1 \beta^{i+2} + G_{i+2} F_2 \beta^{i+4} \mp \text{etc.} \}$$

Für $i=0$ gelten beide Ausdrücke.

Die F und G Coefficienten können hier durch das folgende Verfahren gebildet werden. Sei

$$\frac{m^2}{2} = m_1, \quad \frac{m^3}{2.3} = m_2, \quad \frac{m^4}{2.3.4} = m_3, \quad \text{etc.}$$

Man schreibe die Zahlenwerthe von $m, m_1, \text{etc.}$ unter einander und bilde wie gewöhnlich die Differenzreihen der verschiedenen Ordnungen, nemlich nach folgendem Schema

$$\begin{array}{rcl}
 m & & \\
 m_1 & m_1 - m = \alpha & \beta - \alpha = \alpha_1 \\
 m_2 & m_2 - m_1 = \beta & \beta_1 - \alpha_1 = \alpha_2 \\
 m_3 & m_3 - m_2 = \gamma & \gamma_1 - \beta_1 = \beta_2 \quad \beta_2 - \alpha_2 = \alpha_3 \text{ etc.} \\
 m_4 & m_4 - m_3 = \delta & \gamma_2 - \beta_2 = \beta_3 \quad \text{etc.} \\
 & & \delta - \gamma = \gamma_1 \quad \text{etc.} \\
 & & \text{etc.}
 \end{array}$$

dann ist

$$\alpha = F_2, \alpha_1 = F_3, \alpha_2 = F_4, \text{ etc.}$$

Bildet man eben so die Summen, nemlich

$$\begin{array}{rcl}
 m & & \\
 m_1 & m_1 + m = a & b + a = a_1 \\
 m_2 & m_2 + m_1 = b & b_1 + a_1 = a_2 \\
 m_3 & m_3 + m_2 = c & c_1 + b_1 = b_2 \quad b_2 + a_2 = a_3 \text{ etc.} \\
 m_4 & m_4 + m_3 = d & c_2 + b_2 = b_3 \quad \text{etc.} \\
 & & d + c = c_1 \quad \text{etc.} \\
 & & \text{etc.}
 \end{array}$$

so wird

$$a = G_2, a_1 = G_3, a_2 = G_4, \text{ etc.}$$

66.

Zwischen den *C* und *D* Coefficienten lassen sich nicht so einfache, und wie es scheint, auch nicht so viele, endliche Relationen angeben, wie zwischen den der vor. §§. Ich werde hier nur Eine Relation zwischen fünf dieser Coefficienten ableiten. Es ist

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\cos \varphi}{\varrho^2} \frac{x}{z}$$

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{x^{-2} \sin^2 \varphi + 4x^{-1} \sin \varphi + 4 + 2 \sin^2 \varphi + 4x \sin \varphi + x^2 \sin^2 \varphi}{4 \cos^4 \varphi}$$

Substituirt man diese in die identische Gleichung

$$d \cdot x^\mu = \mu x^\mu \frac{dx}{x}$$

so kommt

$$z \frac{d \cdot x^\mu}{dz} = \mu \frac{x^{\mu-2} \sin^2 \varphi + 4 x^{\mu-1} \sin \varphi + (4 + 2 \sin^2 \varphi) x^\mu + 4 x^{\mu+1} \sin \varphi + x^{\mu+2} \sin^2 \varphi}{4 \cos^3 \varphi}$$

und wenn die Gleichungen

$$x^\mu = \sum C_i^{(\mu)} z^i, \quad \frac{d \cdot x^\mu}{dz} = \sum i C_i^{(\mu)} z^{i-1}$$

berücksichtigt werden,

$$0 = \mu \sin^2 \varphi C_i^{(\mu-2)} + 4 \mu \sin \varphi C_i^{(\mu-1)} + \{\mu(4 + 2 \sin^2 \varphi) - 4i \cos^3 \varphi\} C_i^{(\mu)} \\ + 4 \mu \sin \varphi C_i^{(\mu+1)} + \mu \sin^2 \varphi C_i^{(\mu+2)}$$

Durch Hülfe der Gleichung

$$C_i^{(\mu)} = \frac{\mu}{i} D_\mu^{(i)}$$

bekommt man hieraus

$$0 = (\mu-2) \sin^2 \varphi D_{\mu-2}^{(i)} + 4(\mu-1) \sin \varphi D_{\mu-1}^{(i)} + \{\mu(4 + 2 \sin^2 \varphi) - 4i \cos^3 \varphi\} D_\mu^{(i)} \\ + 4(\mu+1) \sin \varphi D_{\mu+1}^{(i)} + (\mu+2) \sin^2 \varphi D_{\mu+2}^{(i)}$$

wo $i=0$ keine Ausnahme macht.

§ VI.

Entwicklung der Functionen $\varrho^n \cos mf$ und $\varrho^n \sin mf$ in Reihen, die nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen der mittleren Anomalien fortschreiten.

67.

Diese Aufgabe kann schon durch den Inhalt der vorhergehenden §§ auf zwei Arten gelöst werden. Im § I wurde $\varrho^n x^m$ in eine nach den Potenzen von x fortschreitende Reihe verwandelt, und im § V wurden die Potenzen von x in Reihen verwandelt, die nach den Potenzen von z fortschreiten. Die Verbindung dieser beiden Aufgaben giebt eine Auflösung der gegenwärtigen. Es wurde gefunden

$$\varrho^n x^m = \sum V_i^{(n)} x^{m \pm i}$$

$$x^\mu = \sum C_i^{(\mu)} z^i$$

multiplicirt man diese beiden Reihen mit einander, so ergibt sich, nachdem

$\varrho^n x^m = \sum_{-\infty}^{+\infty} X_i^{n,m} z^i$
 gesetzt worden ist,

$$\begin{aligned}
 X_i^{n,m} &= V_0^{(n)} C_i^{(m)} + V_1^{(n)} C_i^{(m+1)} + V_2^{(n)} C_i^{(m+2)} + \text{etc.} \\
 &+ V_1^{(n)} C_i^{(m-1)} + V_2^{(n)} C_i^{(m-2)} + \text{etc.}
 \end{aligned}$$

68.

Die zweite Auflösung ergibt sich aus dem Inhalt der §§ III und IV. Dort wurde

$$\begin{aligned}
 \varrho^n x^m &= \sum W_i^{n,m} y^i \\
 y^i &= \sum P_h^{(i)} z^h
 \end{aligned}$$

gefunden, und die Multiplication dieser beiden Reihen mit einander giebt

$$\begin{aligned}
 X_h^{n,m} &= W_0^{n,m} P_h^{(0)} + W_1^{n,m} P_h^{(1)} + W_2^{n,m} P_h^{(2)} + \text{etc.} \\
 &+ W_{-1}^{n,m} P_h^{(-1)} + W_{-2}^{n,m} P_h^{(-2)} + \text{etc.}
 \end{aligned}$$

69.

Ausser diesen beiden Auflösungen lässt sich eine einfache directe Auflösung auf ähnliche Art wie die des vor. § finden, und mehrere der dort gefundenen Formen werden sich als specielle Fälle der hier zu entwickelnden darstellen. Vermittelst des oft angewandten Satzes wird

$$X_i^{n,m} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c-\pi\sqrt{-1}}^{c+\pi\sqrt{-1}} \varrho^n x^m z^{-i-1} dz \quad (63)$$

und diese geht durch die Substitution der Gleichungen

$$\varrho = \frac{(1-\beta^2)^2}{1+\beta^2} (1+\beta x)^{-1} (1+\beta x^{-1})^{-1}$$

$$z = y c^{-\frac{e}{2}(y-y^{-1})}$$

$$y = x \frac{1+\beta x^{-1}}{1+\beta x}$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{(1-\beta^2)^3}{1+\beta^2} (1+\beta x)^{-2} (1+\beta x^{-1})^{-2} \frac{dx}{x}$$

in folgende über

$$X_i^{n,m} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{(1-\beta^2)^{2n+3}}{(1+\beta^2)^{n+1}} \int_{c-\pi\sqrt{-1}}^{c+\pi\sqrt{-1}} x^{m-i-1} (1+\beta x)^{-n+i-2} (1+\beta x^{-1})^{-n-i-2} c^{\mu\beta \left\{ \frac{x}{1+\beta x} - \frac{x^{-1}}{1+\beta x^{-1}} \right\}} dx$$

wo $\mu = i \cos \varphi$ ist. Der Coefficient von dx unter dem Integralzeichen lässt sich wieder in die folgenden drei Factoren zerlegen,

$$x^{m-i-1}; \quad (1+\beta x)^{-n+i-2} c^{\mu\beta \frac{x}{1+\beta x}}; \quad (1+\beta x^{-1})^{-n-i-2} c^{-\mu\beta \frac{x^{-1}}{1+\beta x^{-1}}}$$

Da nun die Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} (1+\beta x) c^{\mu\beta \frac{x}{1+\beta x}} &= 1 - \frac{n-i+2}{1} \beta x + \frac{n-i+2 \cdot n-i+3}{1 \cdot 2} \beta^2 x^2 \mp \text{etc.} \\ &+ \mu \beta x - \mu \frac{n-i+3}{1} \beta^2 x^2 \pm \text{etc.} \\ &+ \frac{\mu^2}{2} \beta^2 x^2 \mp \text{etc.} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

gibt, so wird wenn man

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_1 &= \frac{n-i+2}{1} - \mu \\ \mathfrak{M}_2 &= \frac{n-i+2 \cdot n-i+3}{1 \cdot 2} - \frac{n-i+3}{1} \mu + \frac{\mu^2}{2} \\ \mathfrak{M}_3 &= \frac{n-i+2 \cdot n-i+3 \cdot n-i+4}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{n-i+3 \cdot n-i+4}{1 \cdot 2} \mu + \frac{n-i+4}{1} \frac{\mu^2}{2} - \frac{\mu^3}{2 \cdot 3} \\ &\text{etc.} \\ \mathfrak{M}_p &= \frac{n-i+2 \cdot n-i+3 \cdot \dots \cdot n-i+p+1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot p} - \frac{n-i+3 \cdot n-i+4 \cdot \dots \cdot n-i+p+1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot p-1} \mu \pm \dots \\ &\pm \frac{n-i+p+1}{1} \frac{\mu^{p-1}}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p-1} \mp \frac{\mu^p}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p} \\ &\text{etc.} \\ \mathfrak{N}_1 &= \frac{n+i+2}{1} + \mu \\ \mathfrak{N}_2 &= \frac{n+i+2 \cdot n+i+3}{1 \cdot 2} + \frac{n+i+3}{1} \mu + \frac{\mu^2}{2} \\ \mathfrak{N}_3 &= \frac{n+i+2 \cdot n+i+3 \cdot n+i+4}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n+i+3 \cdot n+i+4}{1 \cdot 2} \mu + \frac{n+i+4}{1} \frac{\mu^2}{2} + \frac{\mu^3}{2 \cdot 3} \\ &\text{etc.} \\ \mathfrak{N}_q &= \frac{n+i+2 \cdot n+i+3 \cdot \dots \cdot n+i+q+1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot q} + \frac{n+i+3 \cdot n+i+4 \cdot \dots \cdot n+i+q+1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot q-1} \mu + \dots \\ &+ \frac{n+i+q+1}{1} \frac{\mu^{q-1}}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot q-1} + \frac{\mu^q}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot q} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

setzt, der Coefficient von dx unter dem Integralzeichen

$$\begin{aligned} &= \sum_0^\infty (-1)^p x^{m-i+p-1} \{ \mathfrak{M}_p \beta^p + \mathfrak{M}_{p+1} \mathfrak{N}_1 \beta^{p+2} + \mathfrak{M}_{p+2} \mathfrak{N}_2 \beta^{p+4} + \text{etc.} \} \\ &+ \sum_1^\infty (-1)^q x^{m-i-q-1} \{ \mathfrak{N}_q \beta^q + \mathfrak{N}_{q+1} \mathfrak{M}_1 \beta^{q+2} + \mathfrak{N}_{q+2} \mathfrak{M}_2 \beta^{q+4} + \text{etc.} \} \end{aligned}$$

und hieraus folgt auf dieselbe Art wie oben

1) wenn $i - m$ positiv ist,

$$X_i^{n,m} = (-1)^{i-m} \frac{(1-\beta^2)^{2n+3}}{(1+\beta^2)^{n+1}} \{ \mathfrak{M}_{i-m} \beta^{i-m} + \mathfrak{M}_{i-m+1} \mathfrak{N}_1 \beta^{i-m+2} + \mathfrak{M}_{i-m+2} \mathfrak{N}_2 \beta^{i-m+4} + \text{etc.} \}$$

2) wenn $m - i$ positiv ist,

$$X_i^{n,m} = (-1)^{m-i} \frac{(1-\beta^2)^{2n+3}}{(1+\beta^2)^{n+1}} \{ \mathfrak{N}_{m-i} \beta^{m-i} + \mathfrak{N}_{m-i+1} \mathfrak{M}_1 \beta^{m-i+2} + \mathfrak{N}_{m-i+2} \mathfrak{M}_2 \beta^{m-i+4} + \text{etc.} \}$$

Für $m = i$ gelten beide Ausdrücke. Es ist zu bemerken, dass die Auflösung des Art. 60 des vor. § ein specieller Fall dieser ist, welcher daraus hervorgeht, wenn man $n = 0$ macht.

70.

Eine andere Form erhält man, wenn man in der Gleichung (63) die Grösse unter dem Integralzeichen durch die Gleichungen

$$\rho = \cos^2 \frac{1}{2} \varphi (1 - \beta y) (1 - \beta y^{-1})$$

$$x = y \frac{1 - \beta y^{-1}}{1 - \beta y}$$

$$z = y c^{-\frac{e}{2} (y - y^{-1})}$$

$$\frac{dz}{z} = \cos^2 \frac{1}{2} \varphi \frac{dy}{y} (1 - \beta y) (1 - \beta y^{-1})$$

zur Function von y und dy macht. Man erhält dadurch

$$X_i^{n,m} = \frac{\cos^2 \frac{1}{2} \varphi}{2\pi \sqrt{-1}} \int_{c^{-\pi \sqrt{-1}}}^{c^{+\pi \sqrt{-1}}} y^{m-i-1} (1 - \beta y)^{n-m+1} (1 - \beta y^{-1})^{n+m+1} e^{v\beta(y-y^{-1})} dy \quad (64)$$

wo $v = i \cos^2 \frac{1}{2} \varphi$ ist. Zerlegt man erst den Coefficienten von dy unter dem Integralzeichen in die folgenden drei Factoren

$$y^{m-i-1}; \quad (1 - \beta y)^{n-m+1} c^{-v(1-\beta y)}; \quad (1 - \beta y^{-1})^{n+m+1} e^{v(1-\beta y^{-1})}$$

so wird derselbe nach der Entwicklung

$$\begin{aligned} &= \sum_0^\infty (-1)^p y^{m-i+p-1} \{ G_p H_0 \beta^p + G_{p+1} H_1 \beta^{p+2} + \text{etc.} \} \\ &+ \sum_1^\infty (-1)^q y^{m-i-q-1} \{ H_q G_0 \beta^q + H_{q+1} G_1 \beta^{q+2} + \text{etc.} \} \end{aligned}$$

wo

$$G_0 = c^{-v}, \quad H_0 = c^v$$

und ausserdem allgemein

$$G_p = \frac{n-m+1 \cdot n-m \dots n-m-p+2}{1 \cdot 2 \dots p} - \frac{n-m+2 \cdot n-m+1 \dots n-m-p+3}{1 \cdot 2 \dots p} \nu$$

$$+ \frac{n-m+3 \cdot n-m+2 \dots n-m-p+4}{1 \cdot 2 \dots p} \cdot \frac{\nu^2}{2} + \text{etc.}$$

$$H_q = \frac{n+m+1 \cdot n+m \dots n+m-q+2}{1 \cdot 2 \dots q} + \frac{n+m+2 \cdot n+m+1 \dots n+m-q+3}{1 \cdot 2 \dots q} \nu$$

$$+ \frac{n+m+3 \cdot n+m+2 \dots n+m-q+4}{1 \cdot 2 \dots q} \cdot \frac{\nu^2}{2} + \text{etc.}$$

Es folgt hieraus auf dieselbe Art wie oben

1) wenn $i-m$ positiv ist,

$$X_i^{n,m} = (-1)^{i-m} \cos^{2(n+1)\frac{1}{2}} \varphi \{ G_{i-m} H_0 \beta^{i-m} + G_{i-m+1} H_1 \beta^{i-m+2} + G_{i-m+2} H_2 \beta^{i-m+4} + \text{etc.} \}$$

2) wenn $m-i$ positiv ist,

$$X_i^{n,m} = (-1)^{m-i} \cos^{2(n+1)\frac{1}{2}} \varphi \{ H_{m-i} G_0 \beta^{m-i} + H_{m-i+1} G_1 \beta^{m-i+2} + H_{m-i+2} G_2 \beta^{m-i+4} + \text{etc.} \}$$

Von dieser Form ist die des Art. 62 ein specieller Fall, welcher durch die Annahme $n=0$ entsteht.

71.

Noch eine andere Form ergibt sich, wenn man den Coefficienten von dy unter dem Integralzeichen in (64) in folgende Factoren auflöst.

$$y^{m-i-1}; \quad (1-\beta y)^{n-m+1} e^{\nu \beta y}; \quad (1-\beta y)^{-1} e^{-\nu \beta y}$$

Derselbe wird nun nach der Entwicklung

$$= \sum_0^\infty (-1)^p y^{m-i+p-1} \{ P_p \beta^p + P_{p+1} Q_1 \beta^{p+2} + \text{etc.} \}$$

$$+ \sum_1^\infty (-1)^q y^{m-i-q-1} \{ Q_q \beta^q + Q_{q+1} P_1 \beta^{q+2} + \text{etc.} \}$$

wo

$$P_1 = \frac{n-m+1}{1} - \nu$$

$$P_2 = \frac{n-m+1 \cdot n-m}{1 \cdot 2} - \frac{n-m+1}{1} \nu + \frac{\nu^2}{2}$$

$$P_3 = \frac{n-m+1 \cdot n-m \cdot n-m-1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{n-m+1 \cdot n-m}{1 \cdot 2} \nu + \frac{n-m+1}{1} \frac{\nu^2}{2} - \frac{\nu^3}{2 \cdot 3}$$

etc.

$$P_p = \frac{n-m+1 \cdot n-m \dots n-m-p+2}{1 \cdot 2 \dots p} - \frac{n-m+1 \cdot n-m \dots n-m-p+3}{1 \cdot 2 \dots p-1} \nu + \dots$$

$$\dots + \frac{n-m+1}{1} \frac{\nu^{p-1}}{2 \cdot 3 \dots p-1} + \frac{\nu^p}{2 \cdot 3 \dots p}$$

etc.

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \frac{n+m+1}{1} + v \\
 Q_2 &= \frac{n+m+1 \cdot n+m}{1 \cdot 2} + \frac{n+m+1}{1} v + \frac{v^2}{2} \\
 Q_3 &= \frac{n+m+1 \cdot n+m \cdot n+m-1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n+m+1 \cdot n+m}{1 \cdot 2} v + \frac{n+m+1}{1} \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{2 \cdot 3} \\
 &\text{etc.} \\
 Q_q &= \frac{n+m+1 \cdot n+m \cdot \dots \cdot n+m-q+2}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot q} + \frac{n+m+1 \cdot n+m \cdot \dots \cdot n+m-q+3}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot q-1} v + \dots \\
 &\dots + \frac{n+m+1}{1} \frac{v^{q-1}}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot q-1} + \frac{v^q}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot q} \\
 &\text{etc.}
 \end{aligned}$$

ist, und hieraus folgt

$$\begin{aligned}
 &1) \text{ wenn } i - m \text{ positiv ist,} \\
 X_i^{n,m} &= (-1)^{i-m} \cos^{2(n+1)} \frac{1}{2} \varphi \{ P_{i-m} \beta^{i-m} + P_{i-m+1} Q_1 \beta^{i-m+2} + P_{i-m+2} Q_2 \beta^{i-m+4} + \text{etc.} \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &2) \text{ wenn } m - i \text{ positiv ist,} \\
 X_i^{n,m} &= (-1)^{m-i} \cos^{2(n+1)} \frac{1}{2} \varphi \{ Q_{m-i} \beta^{m-i} + Q_{m-i+1} P_1 \beta^{m-i+2} + Q_{m-i+2} P_2 \beta^{m-i+4} + \text{etc.} \}
 \end{aligned}$$

wovon die Form des Art. 64 ein specieller Fall ist, welcher durch die Annahme $n = 0$ entsteht.

Ich füge hinzu, dass man noch mehr Formen angeben könnte, muss es aber, um diese Abhandlung nicht zu weit auszudehnen, bei den vorstehenden bewenden lassen. Ich bemerke noch, dass die Coefficienten P , Q , etc. dieses § sich durch ähnliche Algorithmen berechnen lassen, wie die des Art. 65.

72.

Der Fall $i = 0$ führt Vereinfachung mit sich. Setzt man $i = 0$ in die Gleichung (63), so wird

$$X_0^{n,m} = \frac{1}{2\pi \sqrt{-1}} \int_{c-\pi \sqrt{-1}}^{c+\pi \sqrt{-1}} \varrho^n x^m \frac{dz}{z}$$

Aber es ist

$$\frac{dz}{z} = \frac{\varrho^2}{\cos \varphi} \frac{dx}{x}$$

also

$$X_0^{n,m} = \frac{1}{2\pi \sqrt{-1} \cdot \cos \varphi} \int_{c-\pi \sqrt{-1}}^{c+\pi \sqrt{-1}} \varrho^{n+2} x^m \frac{dx}{x}$$

Dieser Ausdruck zeigt, dass $X_0^{n,m}$ dem mit $\cos \varphi$ dividirten Coefficienten von x^{-m} in der Entwicklung von ϱ^{n+2} nach den Potenzen von x gleich

ist. Dieser Coefficient wurde im § I allgemein mit $V_m^{(n+2)}$ bezeichnet, und es ist also

$$X_0^{n,m} = \frac{V_m^{(n+2)}}{\cos \varphi}$$

worauf die im § I gegebenen, verschiedenen Formen der V Coefficienten nach Belieben angewandt werden können.

Von diesem Ausdruck ist wieder der im Art. 64 abgeleitete ein specieller Fall.

73.

Aus der Analyse dieses § geht die unerwartet einfache Auflösung des *Kepler'schen* Problems hervor, die ich schon veröffentlicht habe, und die sich als ein specieller Fall der hier behandelten Aufgabe darstellt. Da

$$(65) \quad f = \int \frac{\cos \varphi}{\varrho^2} dg$$

ist, so kommt es für die Erlangung des Ausdrucks der Mittelpunktsgleichung nur auf die Entwicklung von ϱ^{-2} nach den Potenzen von z an. Setzt man nun

1) $n = -2$ und $m = 0$ in die Formeln des Art. 69, so wird, wenn man zugleich die Zeichen der mit ungradem Index versehenen $\mathfrak{M}$ Coefficienten umkehrt,

$$\mathfrak{M}_i = 1 + \mu + \frac{\mu^2}{2} + \frac{\mu^3}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\mu^i}{2 \cdot 3 \dots i}$$

$$\mathfrak{M}_{i+1} = \frac{\mu^{i+1}}{2 \cdot 3 \dots i+1}$$

$$\mathfrak{M}_{i+2} = -\mathfrak{M}_{i+1} \left(1 - \frac{\mu}{i+2}\right)$$

$$\mathfrak{M}_{i+3} = \mathfrak{M}_{i+1} \left(1 - 2 \frac{\mu}{i+2} + \frac{\mu^2}{i+2 \cdot i+3}\right)$$

$$\mathfrak{M}_{i+4} = -\mathfrak{M}_{i+1} \left(1 - 3 \frac{\mu}{i+2} + 3 \frac{\mu^2}{i+2 \cdot i+3} - \frac{\mu^3}{i+2 \cdot i+3 \cdot i+4}\right)$$

etc.

$$\mathfrak{N}_1 = \frac{i}{1} + \mu$$

$$\mathfrak{N}_2 = \frac{i \cdot i+1}{1 \cdot 2} + \frac{i+1}{1} \mu + \frac{\mu^2}{2}$$

etc.

$$X_i^{-2,0} = \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \{ \mathfrak{M}_i \beta^i - \mathfrak{M}_{i+1} \mathfrak{N}_1 \beta^{i+2} \pm \text{etc.} \}$$

Substituirt man nun diesen Ausdruck in die Gleichung

$$\varrho^{-2} = \sum X_i^{-2,0} z^i$$

und diesen in (65), geht zum Reellen über und integrirt, so wird

$$f - g = \sum_1^\infty \frac{2}{i} \{ \mathfrak{M}_i \beta^i - \mathfrak{M}_{i+1} \mathfrak{N}_1 \beta^{i+2} + \mathfrak{M}_{i+2} \mathfrak{N}_2 \beta^{i+4} \mp \text{etc.} \} \sin ig$$

Eine andere Auflösung findet man, wenn man

2) $n = -2$ und $m = 0$ in die Formeln des Art. 70 setzt. Kehrt man zugleich die Zeichen der G Coefficienten um, deren Index ungrade ist, so wird

$$G_i = 1 - (-1)^i \frac{\nu^{i+1}}{2.2\dots i+1} \left\{ 1 - \frac{i+1}{i+2} \nu + \frac{i+1}{i+3} \frac{\nu^2}{2} \mp \text{etc.} \right\}$$

$$G_{i+1} = 1 - (-1)^{i+1} \frac{\nu^{i+2}}{2.3\dots i+2} \left\{ 1 - \frac{i+2}{i+3} \nu + \frac{i+2}{i+4} \frac{\nu^2}{2} \mp \text{etc.} \right\}$$

etc.

$$H_0 = c^\nu$$

$$H_1 = -1 + \frac{\nu^2}{2} \left\{ 1 + \frac{2}{3} \nu + \frac{2}{4} \frac{\nu^2}{2} + \text{etc.} \right\}$$

$$H_2 = 1 + \frac{\nu^3}{2.3} \left\{ 1 + \frac{3}{4} \nu + \frac{3}{5} \frac{\nu^2}{2} + \text{etc.} \right\}$$

etc.

$$X_i^{-2,0} = (1 + \beta^2) \{ G_i H_0 \beta^i - G_{i+1} H_1 \beta^{i+2} + G_{i+2} H_2 \beta^{i+4} \mp \text{etc.} \}$$

woraus auf dieselbe Art wie oben

$$f - g = (1 - \beta^2) \sum_1^\infty \frac{2}{i} \{ G_i H_0 \beta^i - G_{i+1} H_1 \beta^{i+2} \pm \text{etc.} \} \sin ig$$

folgt. Setzt man

3) $n = -2$ und $m = 1$ in die Formeln des Art. 71 und kehrt zugleich die Zeichen aller mit ungradem Index versehenen P und Q Coefficienten um, so entsteht

$$P_i = 1 + \nu + \frac{\nu^2}{2} + \dots + \frac{\nu^i}{2.3\dots i}$$

$$P_{i+1} = P_i + \frac{\nu^{i+1}}{2.3\dots i+1}$$

$$P_{i+2} = P_{i+1} + \frac{\nu^{i+2}}{2.3\dots i+2}$$

etc.

$$Q_1 = 1 - \nu$$

$$Q_2 = Q_1 + \frac{\nu^2}{2}$$

$$Q_3 = Q_2 - \frac{\nu^3}{2.3}$$

etc.

und hiemit

$$f - g = (1 - \beta^2) \sum_1^\infty \frac{2}{i} \{P_i \beta^i + P_{i+1} Q_1 \beta^{i+2} + P_{i+2} Q_2 \beta^{i+4} + \text{etc.}\} \sin ig$$

Jede dieser drei Auflösungen des *Keppler'schen* Problems ist bei Weitem einfacher wie die vorher bekannten, und besonders die letzte lässt an Einfachheit nichts zu wünschen übrig.

Vergleicht man die im Art. 63 abgeleiteten Werthe der Coefficienten $D_0^{(i)}$ mit dem Vorstehenden, so zeigt sich, dass sie den Coefficienten der Mittelpunktsgleichung gleich sind. Man darf daher nicht hoffen, sie auf endliche Ausdrücke hinführen zu können, wie im Art. 64 bei den Coefficienten $C_0^{(\mu)}$ möglich wurde.

Ueber die Convergenz der in diesem und in dem vorhergehenden § vorkommenden unendlichen Reihen habe ich noch nichts gesagt. Man findet aber leicht, dass sie alle für jeden Werth von μ und i , so wie für alle Werthe von $\beta < 1$, also auch für alle Werthe von

$$e < 1$$

convergiren.

74.

Um Relationen zwischen den X Coefficienten abzuleiten, bediene ich mich wieder der oben mehrmals angewandten Methode. In die identische Gleichung

$$z \frac{d \cdot \varrho^n x^m}{dz} = x^m z \frac{d \cdot \varrho^n}{dz} + \varrho^n z \frac{d \cdot x^m}{dz}$$

substituire ich in die Gleichungen

$$z \frac{d \cdot \varrho^n}{dz} = \frac{n \sin \varphi}{2 \cos \varphi} \varrho^{n-1} \left(\frac{1}{x} - x \right)$$

$$z \frac{d \cdot x^m}{dz} = m \cos \varphi \varrho^{-2} x^m$$

Hieraus entsteht

$$(66) \quad z \frac{d \cdot \varrho^n x^m}{dz} = \frac{n \sin \varphi}{2 \cos \varphi} \varrho^{n-1} (x^{m-1} - x^{m+1}) + m \cos \varphi \varrho^{n-2} x^m$$

Diese lässt sich auf mehrfache Art durch den Ausdruck von ϱ durch x , nemlich durch

$$\sin \varphi (x^{-1} + x) - 2 \cos^2 \varphi \varrho^{-1} + 2 = 0$$

verändern. Multiplicirt man nemlich diese Gleichung nach und nach mit

$$+ \frac{n \varrho^{n-1} x^m}{2 \cos \varphi} \quad \text{und} \quad \frac{m \varrho^{n-1} x^m}{2 \cos \varphi}$$

und addirt die Producte zur rechten Seite von (66), so erhält man

$$z \frac{d \cdot \varrho^n x^m}{dz} = \frac{n \sin \varphi}{\cos \varphi} \varrho^{n-1} x^{m-1} + (m-n) \cos \varphi \varrho^{n-2} x^m + \frac{n}{\cos \varphi} \varrho^{n-1} x^m \quad (67)$$

$$z \frac{d \cdot \varrho^n x^m}{dz} = -\frac{n \sin \varphi}{\cos \varphi} \varrho^{n-1} x^{m+1} + (m+n) \cos \varphi \varrho^{n-2} x^m - \frac{n}{\cos \varphi} \varrho^{n-1} x^m \quad (68)$$

$$z \frac{d \cdot \varrho^n x^m}{dz} = \frac{(n+m) \sin \varphi}{2 \cos \varphi} \varrho^{n-1} x^{m-1} - \frac{(n-m) \sin \varphi}{2 \cos \varphi} \varrho^{n-1} x^{m+1} + \frac{m}{\cos \varphi} \varrho^{n-1} x^m \quad (69)$$

welche Gleichungen zwischen vier X Coefficienten geben werden. Multiplicirt man die rechte Seite von (69) mit

$$\frac{\sin \varphi}{2 \cos^2 \varphi} \varrho (x^{-1} + x) + \frac{\varrho}{\cos^2 \varphi} = 1$$

so entsteht

$$\begin{aligned} z \frac{d \cdot \varrho^n x^m}{dz} = & \frac{(n+m) \sin^2 \varphi}{4 \cos^3 \varphi} \varrho^n x^{m-2} + \frac{(n+2m) \sin \varphi}{2 \cos^3 \varphi} \varrho^n x^{m-1} \\ & + \frac{2m + m \sin^2 \varphi}{2 \cos^3 \varphi} \varrho^n x^m \\ & - \frac{(n-2m) \sin \varphi}{2 \cos^3 \varphi} \varrho^n x^{m+1} - \frac{(n-m) \sin^2 \varphi}{4 \cos^3 \varphi} \varrho^n x^{m+2} \end{aligned} \quad (70)$$

welche eine Gleichung zwischen fünf X Coefficienten geben wird.

Differentiirt man die Gleichungen (67) und (68), so bekommt man leicht

$$\begin{aligned} z^2 \frac{d^2 \cdot \varrho^n x^m}{dz^2} + z \frac{d \cdot \varrho^n x^m}{dz} = & [n(n-2) + m^2] \cos^2 \varphi \varrho^{n-4} x^m - n(2n-3) \varrho^{n-3} x^m \\ & + n(n-1) \varrho^{n-2} x + m(n-1) \sin \varphi \varrho^{n-3} (x^{m-1} - x^{m+1}) \end{aligned} \quad (71)$$

und hieraus ergeben sich durch Hülfe der Gleichung

$$\sin \varphi (x^{-1} + x) - 2 \cos^2 \varphi \varrho^{-1} + 2 = 0$$

die folgenden beiden

$$\begin{aligned} z^2 \frac{d^2 \cdot \varrho^n x^m}{dz^2} + z \frac{d \cdot \varrho^n x^m}{dz} = & [n(n-2) + m^2 - 2m(n-1)] \cos^2 \varphi \varrho^{n-4} x^m - [n(2n-3) - 2m(n-1)] \varrho^{n-3} x^m \\ & + n(n-1) \varrho^{n-2} x^m + 2m(n-1) \sin \varphi \varrho^{n-3} x^{m-1} \end{aligned} \quad (72)$$

$$\begin{aligned} z^2 \frac{d^2 \cdot \varrho^n x^m}{dz^2} + z \frac{d \cdot \varrho^n x^m}{dz} = & [n(n-2) + m^2 + 2m(n-1)] \cos^2 \varphi \varrho^{n-4} x^m - [n(2n-3) + 2m(n-1)] \varrho^{n-3} x^m \\ & + n(n-1) \varrho^{n-2} x^m - 2m(n-1) \sin \varphi \varrho^{n-3} x^{m+1} \end{aligned} \quad (73)$$

Substituirt man nun die Gleichungen

$$\varrho^n x^m = \sum X_i^{n,m} z^i$$

$$z \frac{d \cdot \varrho^n x^m}{dz} = \sum i X_i^{n,m} z^i$$

$$z^2 \frac{d^2 \cdot \varrho^n x^m}{dz^2} = \sum i(i-1) X_i^{n,m} z^i$$

in die Gleichungen (66) bis (73), so bekommt man die folgenden Relationen,

- (a) $0 = n \sin \varphi X_i^{n-1, m-1} - n \sin \varphi X_i^{n-1, m+1} + 2m \cos^2 \varphi X_i^{n-2, m} - 2i \cos \varphi X_i^{n, m}$
- (b) $0 = n \sin \varphi X_i^{n-1, m-1} + (m-n) \cos^2 \varphi X_i^{n-2, m} + n X_i^{n-1, m} - i \cos \varphi X_i^{n, m}$
- (c) $0 = -n \sin \varphi X_i^{n-1, m+1} + (m+n) \cos^2 \varphi X_i^{n-2, m} - n X_i^{n-1, m} - i \cos \varphi X_i^{n, m}$
- (d) $0 = (n+m) \sin \varphi X_i^{n-1, m-1} - (n-m) \sin \varphi X_i^{n-1, m+1} + 2m X_i^{n-1, m} - 2i \cos \varphi X_i^{n, m}$
- (e) $0 = (n+m) \sin^2 \varphi X_i^{n, m-2} + 2(n+2m) \sin \varphi X_i^{n, m-1} + (4m+2m \sin^2 \varphi - 4i \cos^3 \varphi) X_i^{n, m} - 2(n-2m) \sin \varphi X_i^{n, m+1} - (n-m) \sin^2 \varphi X_i^{n, m+2}$
- (f) $0 = [n(n-2) + m^2] \cos^2 \varphi X_i^{n-4, m} - n(2n-3) X_i^{n-3, m} + n(n-1) X_i^{n-2, m} + m(n-1) \sin \varphi X_i^{n-3, m-1} - m(n-1) \sin \varphi X_i^{n-3, m+1} - i^2 X_i^{n, m}$
- (g) $0 = [n(n-2) + m^2 - 2m(n-1)] \cos^2 \varphi X_i^{n-4, m} - [n(2n-3) - 2m(n-1)] X_i^{n-3, m} + n(n-1) X_i^{n-2, m} + 2m(n-1) \sin \varphi X_i^{n-3, m-1} - i^2 X_i^{n, m}$
- (h) $0 = [n(n-2) + m^2 + 2m(n-1)] \cos^2 \varphi X_i^{n-4, m} - [n(2n-3) + 2m(n-1)] X_i^{n-3, m} + n(n-1) X_i^{n-2, m} - 2m(n-1) \sin \varphi X_i^{n-3, m+1} - i^2 X_i^{n, m}$

Man kann hieraus durch Eliminationen noch viele Gleichungen mehr ableiten, von welchen ich nur einige hier entwickeln werde. Schreibt man in (a) erst $n+1$ statt n und $m+1$ statt m , dann $n+1$ statt n und $m-1$ statt m , und eliminirt hierauf zwischen diesen beiden Gleichungen und der Gleichung (a) die beiden Coefficienten $X_i^{n-1, m-1}$ und $X_i^{n-1, m+1}$, so bekommt man

$$0 = 2nm(n+1) \sin^2 \varphi X_i^{n, m} + 4m(m^2-1) \cos^4 \varphi X_i^{n-2, m} - n(n+1)(m+1) \sin^2 \varphi X_i^{n, m-2} - n(n+1)(m-1) \sin^2 \varphi X_i^{n, m+2} + 2in(m+1) \sin \varphi \cos \varphi X_i^{n+1, m-1} - 2in(m-1) \sin \varphi \cos \varphi X_i^{n+1, m+1} - 4i(m^2-1) \cos^3 \varphi X_i^{n, m}$$

die sich für $m=0$ vereinfacht, und dann in Verbindung mit (a) nützlich wird.

Eliminirt man $X_i^{n, m}$ entweder zwischen (a) und (d), oder (b) und (c), so ergibt sich

$$0 = \sin \varphi X_i^{n-1, m-1} + \sin \varphi X_i^{n-1, m+1} + 2 X_i^{n-1, m} - 2 \cos^2 \varphi X_i^{n-2, m}$$

die man auch ohne Differentiation aus der Gleichung zwischen x und φ hätte finden können.

Eliminirt man $X_i^{n-3, m-1}$ zwischen (f) und (a), nachdem man in letzterer $n-2$ statt n geschrieben hat, so verschwindet zugleich $X_i^{n-3, m+1}$, und man erhält

$$0 = n[(n-2)^2 - m^2] \cos^2 \varphi X_i^{n-4, m} - n(n-2)(2n-3) X_i^{n-3, m} \\ + (n-1)[n(n-2) + 2im \cos \varphi] X_i^{n-2, m} - i^2(n-2) X_i^{n, m}$$

Eliminirt man $X_i^{n-3, m}$ zwischen (f) und (d), nachdem man in dieser $n-2$ statt n gesetzt hat, so wird

$$0 = [2m^2(n-1) + n(2n-3)(n+m-2) \sin \varphi] X_i^{n-3, m-1} - [2m^2(n-1) + n(2n-3)(n-m-2)] \sin \varphi X_i^{n-3, m+1} \\ + 2m[n(n-2) + m^2] \cos^2 \varphi X_i^{n-4, m} + [2mn(n-1) - 2in(2n-3) \cos \varphi] X_i^{n-2, m} - 2i^2m X_i^{n, m}$$

deren man noch mehrere ableiten kann.

Ich bemerke noch, dass man, da

$$X_i^{0, m} = C_i^{(m)} = \frac{m}{i} D_m^{(i)}$$

ist, Relationen zwischen den X Coefficienten und den C und D Coefficienten des vor. § aus den vorstehenden erhält, wenn man darin entweder

$$n = 0, \text{ oder } n = 1, \text{ oder } n = 2, \text{ etc.}$$

macht, von welchen mehrere sehr einfach sind.

- A. W. VOLKMANN, über einige Probleme der Hämodynamik und deren Lösbarkeit.
 EDUARD WEBER, über die Gewichtsverhältnisse der Muskeln des menschlichen Körpers.
 MARCHAND, über das Auftreten und die Ermittlung des Arsens im thierischen Körper.
 G. TH. FECHNER, über das Causalgesetz.
 D'ARREST, über den zweiten Cometen von 1849 und den neuentdeckten Planeten Hygiea.
 MARCHAND, Mittheilung aus einer Untersuchung über das Leuchten des Phosphors.
 A. W. VOLKMANN, die Abhängigkeit des Pulses der Lymphherzen vom Nervensysteme.
 E. H. WEBER, über die Abhängigkeit der Entstehung der animalischen Muskeln von der der animalischen Nerven.
 E. H. WEBER, Zusätze zu seinen Untersuchungen über den Bau der Leber.

Aus dem Jahr 1850. 3 Hefte. 8. broch.

Jedes Heft 10 Ngr.

- D'ARREST, neue Verbesserung der Elemente der Hygiea-Bahn.
 MÖBIUS, über einen von ihm gefundenen Beweis des Satzes vom Parallelogramme der Kräfte.
 E. H. WEBER, über die periodische Farbenveränderung, welche die Leber der Hühner und der Frösche erleidet.
 E. F. WEBER, über ein Verfahren, den Kreislauf des Blutes und die Function des Herzens willkürlich zu unterbrechen.
 D'ARREST, über den gegenwärtigen Cometen 1850. I.
 D'ARREST, über die totale in Syrien beobachtete Sonnenfinsterniss im Jahre 812 n. Chr.
 HANKEL, über die Construction eines Elektrometers.
 HANKEL, Messungen über die Grösse der Kraft, welche zwischen einer elektrischen Spirale und einem in ihrer Axe befindlichen Eisenkerne in der Richtung dieser Axe wirkt.
 D'ARREST, Bestimmung der Declination im magnetischen Observatorium zu Leipzig.
 D'ARREST, Nachricht von der Entdeckung und den ersten Beobachtungen des Planeten Victoria, des Cometen von Bond und des dreizehnten Hauptplaneten.
 E. H. WEBER, Einige Bemerkungen über den Bau des Seehundes, *phoca vitulina*, u. s. w.
 LEHMANN, einige vergleichende Analysen des Blutes der Pfortader und der Lebervenen.
 E. H. WEBER, Anwendung der Wellenlehre auf die Lehre vom Kreislauf des Blutes.

Aus dem Jahr 1851. 2 Hefte. 8. broch.

Jedes Heft 10 Ngr.

- VOLKMANN, über das Zustandekommen der Muskelcontractionen im Verlaufe der Zeit.
 ERDMANN, über eine merkwürdige Structurveränderung bleihaltigen Zinnes.
 ERDMANN, Mittheilung über Wagners Untersuchung der Moringerbsäure.
 ERDMANN, über die Zähigkeit des Lebens der *Tradescantia zebrina*.
 MÖBIUS, über symmetrische Figuren.
 REICH, neue Versuche mit der Drehwage zur Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde.
 E. WEBER, über den Mechanismus des Gehörorgans.
 D'ARREST, über die Gruppierung der periodischen Cometen.
 HANSEN, über ein neues Coordinatensystem.
 VOLKMANN, über die Kraft, welche in einem gereizten Muskel des animalen Lebens thätig ist.
 E. F. WEBER, über die Längenverhältnisse der Fleischfasern der Muskeln im Allgemeinen.
 D'ARREST, Beobachtung der Sonnenfinsterniss zu Königsberg am 28. Juli 1851.
 HANKEL, Messungen der Abstossungen des krystallisirten Wismuths durch die Pole eines Magnets mittelst der Drehwage.
 DERSELBE, über das vermeintliche Leitungsvermögen der Marekanite für Electricität.
 DROBISCH, über eine Aufgabe Schooten's.

Aus dem Jahr 1852. 2 Hefte. 8. broch.

Jedes Heft 10 Sgr.

- MÖBIUS, Beitrag zu der Lehre von der Auflösung numerischer Gleichungen.
 NAUMANN, Versuch einer neuen Interpretation der Turmalin-Analysen.
 REICH, über die Regenmenge zu Freiberg.
 LEHMANN, über die Krystallisirbarkeit eines der Hauptbestandtheile der Blutkörperchen.
 SCHLÖMILCH, über die Auflösung von Funktionsgleichungen.
 D'ARREST, Sphärische Sätze.
 MÖBIUS, über eine Methode, um von Relationen, welche der Longimetrie angehören, zu entsprechenden Sätzen der Planimetrie zu gelangen.
 HANSEN, neue directe Auflösung des Kepplerschen Problems.
 DROBISCH, über die Wellenlängen u. Oscillationszahlen d. farbigen Strahlen im Spectrum.
 HANKEL, über die Messung der atmosphärischen Electricität.
 LEHMANN, über den krystallisirbaren Stoff des Blutes.
 E. H. WEBER, über den Raumsinn und die Empfindungskreise in der Haut und im Auge.
 W. WEBER, Verbesserung einer Formel in den elektrodynamischen Maassbestimmungen.

INHALT DER ABHANDLUNGEN

bei Begründung der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften am Tage der zweihundertjährigen Geburtsfeier Leibnizens herausgegeben von der Fürstl. Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig. Mit dem Bildnisse von Leibniz in Medaillon und zahlreichen Holzschnitten und Kupfer- tafeln. 61 Bogen in hoch 4. 1846. broch. Preis 5 Thlr.

W. WACHSMUTH, Briefe von Leibniz an Christian Philipp.

A. F. MÖBIUS, Ueber eine neue Behandlungsweise der analytischen Sphärik. Mit einer Tafel. (Einzeln 16 Ngr.)

M. W. DROBISCH, Ueber die mathematische Bestimmung der musikalischen Intervalle. (Einzeln 12 1/2 Ngr.)

A. SEEBECK, Ueber die Schwingungen der Saiten. (Einzeln 10 Ngr.)

C. F. NAUMANN, Ueber die Spiralen der Conchylien. (Einzeln 16 Ngr.)

F. REICH, Elektrische Versuche. (Einzeln 7 1/2 Ngr.)

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen. Mit Holzschnitten. (Einzeln 1 Thlr.)

E. H. WEBER, Zusätze zur Lehre vom Baue und den Verrichtungen der Geschlechts- organe. Mit 9 Kupfertafeln. (Einzeln 1 Thlr. 10 Ngr.)

C. G. LEHMANN, Beiträge zur Kenntniss des Verhaltens der Kohlensäureexhalation unter verschiedenen physiologischen und pathologischen Verhältnissen. (Einzeln 10 Ngr.)

ABHANDLUNGEN der mathematisch-physischen Classe der König- lich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. I. Band. hoch 4. broch. Preis 4 Thlr. 16 Ngr.

Inhalt:

A. F. MÖBIUS, über die Grundformen der Linien der dritten Ordnung. (Einzeln 24 Ngr.)

P. A. HANSEN, allgemeine Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichun- gen. — Ueber die Entwicklung der Grösse $(1 - 2\alpha H + \alpha^2) - \frac{1}{2}$ nach den Potenzen von α . (Einzeln 12 Ngr.)

A. SEEBECK, über die Querschwingungen gespannter und nicht gespannter elastischer Stäbe. (Einzeln 10 Ngr.)

C. F. NAUMANN, über die cyclocentrische Conchospirale und über das Windungsgesetz von Planorbis Corneus. (Einzeln 10 Ngr.)

W. WEBER, elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere Widerstandsmes- sungen. (Einzeln 1 Thlr.)

F. REICH, neue Versuche mit der Drehwaage. (Einzeln 20 Ngr.)

M. W. DROBISCH, Zusätze zum florentiner Problem. (Einzeln 16 Ngr.)

W. WEBER, elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über Diamagnetismus. (Einzeln 20 Ngr.)

Vom II. Bande ist bis jetzt erschienen:

M. W. DROBISCH, über musikal. Tonbestimmung u. Temperatur. (Einzeln 1 Thlr.)

W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. (Einzeln 1 Thlr. 10 Ngr.)

P. A. HANSEN, Product einer Potenz des Radius Vector. (Einzeln 1 Thlr.)

Leipzig, Juli 1853.

S. Hirzel.

Hansen, P. A.

Entwicklung des Products einer Potenz des Radius Vectors mit dem Sinus oder Cosinus eines Vielfachen der wahren Anomalie in Reihen, die nach den Sinussen oder Cosinussen der Vielfachen der wahren, excentrischen oder mittleren Anomalie fortschreiten (Separat-Abdr. aus den Abhandlungen der mathematischphysischen Classe der königlich Sächsischen Gesellschaft der

Leipzig 1853

4 Math.p. 147 n

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10053518-2